

Supplement to
ADVANCED QUANTUM MECHANICS
===== (2nd Edition)

Freeman J. DYSON
Institute for Advanced Study, Princeton

- I. Particle Mechanics and Field Mechanics (page 1-22)
- II. On the Relation between Scattering Matrix Elements and Cross-sections (page 1-6)
- III. Renormalisation (page 1-44). Ce chapitre a été rédigé par J. LASCoux, Laboratoire de Chimie Nucléaire du Collège de France, et J. MANDELbroJT, Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure.

~~Université de Grenoble~~
Université de Grenoble

Cours professé à
l'ECOLE D'ETE DE PHYSIQUE THEORIQUE
Les Houches (Haute-Savoie), France

Août 1954

The following pages are an expanded version of the section "Field Theory" which occupies pages 47-62 of the Advanced Quantum Mechanics notes, second edition. The main idea of the new version is to illustrate the general principles of the theory at each stage by considering their application to a simple one-particle system.

Particle Mechanics and Field Mechanics

In classical mechanics we consider two kinds of systems: (i) Particle systems, in which the system is described by the positions and velocities of a finite set of particles; (ii) Field systems, in which the system is described by one or more functions, defined all over space and giving the strength of the field at each point. In case (i) the equations of motion are ordinary differential equations, in case (ii) partial differential equations. Examples: for (i) Newtonian mechanics, for (ii) the Maxwell theory.

In quantum theory we have the same two possibilities. (i) Quantum mechanics of particles. (ii) Quantum field theory. We know how to construct quantum theory in case (i), at least for non-relativistic systems. So our method will be to find a general principle of quantization which applies to both kinds of classical mechanics. This will lead us to the quantum field theory when we apply it to the classical field theory.

Before we begin to talk about quantization, we must make some remarks about Classical theories, especially to discover the similarities between classical particle and classical field mechanics. We shall see that the similarity lies chiefly in the fact that both kinds of mechanics can be based upon an Action Principle. This is the reason why we choose the Feynman Action Principle also as the starting-point for our discussion of the quantum theory later on.

Classical Particle Mechanics

We take a single particle with coordinates q^α , $\alpha = 1, 2, 3$ (ordinary Cartesian coordinates). It is moving non-relativistically with mass m in a potential $V(q)$, a function of position only. Write

$$\dot{q}^\alpha = dq^\alpha/dt \quad (A1)$$

The theory is described by a function of the q^α and their time-derivatives, called the Lagrangian,

$$L = L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha). \quad (A2)$$

For the examples here considered

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q), \quad \dot{q}^2 = \sum_1^3 \dot{q}^\alpha{}^2. \quad (A3)$$

The theory applies in a well-known way to more general systems containing more than one particle.

The behavior of the particle is fixed by the Action Principle.

If t_1, t_2 are any two times, then the Action integral

$$I(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} L(t) dt \quad (A4)$$

is stationary for the physically possible trajectories $q^\alpha(t)$. That is to say, the variation $q^\alpha \rightarrow q^\alpha + \delta q^\alpha$ produces no change in I to first order in δq^α , if δq^α is an arbitrary variation vanishing at the times t_1 and t_2 .

We now compute the variation in I .

$$\begin{aligned} \delta I(t_1, t_2) &= \int_{t_2}^{t_1} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \delta q^\alpha dt \\ &\quad + \left[\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t_2}^{t_1} \end{aligned} \quad (A5)$$

The last term in (A5) is zero when $\delta q^\alpha = 0$ at times t_1 and t_2 . So the action principle is equivalent to the Lagrangian equations of motion

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = 0 \quad (A6)$$

which for the special example (A3) reduce to

$$m \ddot{q}^\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \quad (A7)$$

The quantity

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (A8)$$

is the momentum conjugate to q^α .

A more general type of variation is made by varying not only

the q^α but also the times t_1 and t_2 . Thus $t_1 \rightarrow t_1 + \delta t_1$, $t_2 \rightarrow t_2 + \delta t_2$. We define ${}_N q^\alpha$ to be the new q^α , and ${}_o q^\alpha$ to be the old. We write

$$\delta q^\alpha(t) = {}_N q^\alpha(t) - {}_o q^\alpha(t) \quad (A9)$$

for the variation of q^α at a fixed time t , while

$$\begin{aligned} \Delta q^\alpha(t_1) &= {}_N q^\alpha(t_1 + \delta t_1) - {}_o q^\alpha(t_1) \\ &= \delta q^\alpha(t_1) + {}_N q^\alpha(t_1 + \delta t_1) - {}_N q^\alpha(t_1) \\ &= \delta q^\alpha(t_1) + \delta t_1 \dot{{}_N q^\alpha}(t_1) \end{aligned} \quad (A10)$$

is the variation in $q^\alpha(t_1)$ produced by varying both q^α and t_1 .

Under this double variation

$$\begin{aligned} \delta I(t_1, t_2) &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_1} \delta L(t) dt \\ &= L(t_1) \delta t_1 - L(t_2) \delta t_2 + \left[\bar{L} - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (A11)$$

where we drop the term in (A5) which vanishes when the field equations (A6) are satisfied. Using (A8) and (A10), Equation (A11) becomes

$$\begin{aligned} \delta I &= \left[L(t_1) - \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha(t_1) \right] \delta t_1 \\ &\quad - \left[L(t_2) - \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha(t_2) \right] \delta t_2 \\ &\quad + \sum_\alpha p_\alpha \Delta q^\alpha(t_1) - \sum_\alpha p^\alpha \Delta q^\alpha(t_2) \end{aligned} \quad (A12)$$

The Hamiltonian function is by definition

$$H(t) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - L \quad (A13)$$

and so (A12) becomes

$$\delta I = \sum_{\alpha} \left[p_{\alpha} \Delta q^{\alpha}(t_1) - p_{\alpha} \Delta q^{\alpha}(t_2) \right] - \left[H(t_1) \delta t_1 - H(t_2) \delta t_2 \right] \quad (A14)$$

The equations of motion can also be written in the form

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}^{\alpha} = - \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \quad (A15)$$

For the one-particle example, we have by (A3)

$$p^{\alpha} = m \dot{q}^{\alpha} \quad (A16)$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum p_{\alpha}^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (A17)$$

We see that although the Action Principle states only that the action is stationary for variations vanishing at the end-points t_1 and t_2 , we can deduce the result (A14) of a variation which does not vanish at the end-points. This is possible because each state of motion is defined by fixing as many coordinates as can be fixed independently (e.g. the 3 coordinates at two different times, or 3 coordinates and 3 velocities at one time) and then the whole past and future of the motion is determined by the field equations.

Classical Relativistic Field Theory

We now go over the action principle formulation of field theory in pages 47-49 of the AQM notes. Notice that everything in the particle mechanics has a precise analog in the field mechanics.

<u>Particle</u>	<u>Field</u>
Time t	Space-time point $X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$
Time interval $t_2 - t_1$	Space-time region Ω
End-points t_1, t_2	Boundary 3-dimensional surface Σ
Coordinates q^α which are functions of t	Field quantities ϕ^α which are functions of (x_1, x_2, x_3, x_0)

The only place in the theory where this parallelism breaks down is in the definition of the Hamiltonian. The Hamiltonian exists in the field theory only when we speak of the special case of flat surfaces σ_1 and σ_2 defined by times t_1 and t_2 . In this case the Hamiltonian is a function of time only, in the field theory as well as in the particle theory. So the analogy time $t \rightarrow$ space-time point X is not valid any more. For this reason the Hamiltonian Formalism obscures the correspondence between particle and field mechanics, and we shall avoid using the Hamiltonian in our development of the quantum theory, so far as possible.

Particle Quantum Mechanics

In the quantum theory the coordinates $q^\alpha(t)$ of a particle are supposed to be operators. They are to satisfy the same equation of motion (A7) as before. This is ensured if we assume that the same Action Principle holds, namely

$$\delta I = 0 \quad (A 18)$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (A 19)$$

for all variations of the q^α vanishing at t_1 and t_2 . By a variation in this case we mean a change of q^α to $q^\alpha + \delta q^\alpha$, where the δq^α are ordinary numbers and not operators.

In quantum theory, because of the uncertainty principle, it is not possible to give numerical values to the $q^\alpha(t)$ throughout a physical motion. In fact a state of motion is specified by giving numerical values to the $q^\alpha(t)$, or alternatively to the $p^\alpha(t)$, at a single time t . The future of the state cannot then be determined from the second order equations (A7). So the Action principle (A18) which was enough for classical mechanics is no longer enough. We must make some additional statement about the behavior of δI for variations δq^α which are not zero at t_1 and t_2 .

A state of motion is specified if we give a time t and numerical values q'^α for the eigenvalue of the operators q^α at time t . The state in which the $q^\alpha(t)$ have the eigenvalues q'^α is written $|q'^\alpha, t\rangle$ in Dirac's ket notation. This is a special kind of state in which the particle has a well-defined position at time t . A general state is a linear combination of

$$\int d_3 q' \psi(q'; t) |q'^\alpha, t\rangle \quad (A20)$$

where $\psi(q'; t)$ is the "wave-function" of the state as usually defined in Schrödinger wave-mechanics.

Physically observable quantities are expressions such as the matrix element

$$\langle q_1'^\alpha, t_1 | q^\beta(t) | q_2'^\alpha, t_2 \rangle \quad (A21)$$

of the position operator $q^A(t)$ between the two states specified by q_1^A at time t_1 and by q_2^A at time t_2 . In particular, the transition probability amplitude between the two states is

$$M = \langle q_1^A, t_1 | q_2^A, t_2 \rangle \quad (A22)$$

$|M|^2$ is the probability for finding the particle at the position q_1^A at time t_2 , in the state in which it was known to be at q_2^A at the earlier time t_2 .

Huyghens' Principle and the Feynman Method of Quantization

Feynman arrived at his method of quantizing particle mechanics by following the well-known relationship

as

Geometrical Optics

is to

Wave Optics

So is

Classical particle mechanics

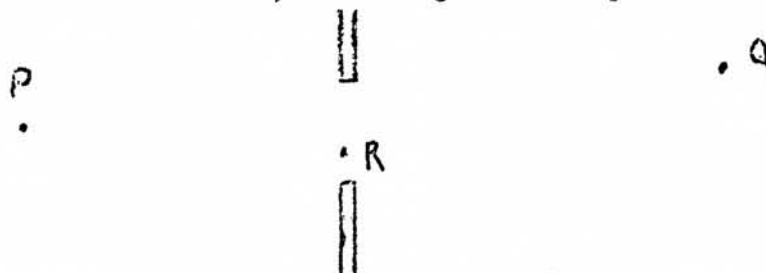
to

quantum particle mechanics

In geometrical optics the rays of light are defined by Fermat's principle of least time. The ray passing through two points XY is the path joining X to Y, such that the time taken for a disturbance moving along it from X to Y (with velocity defined by the local refractive-index at each point) is a minimum. In classical particle mechanics the rays are replaced by orbits. The orbit of a particle travelling from X to Y is the path along which the Action Integral (A4) is a minimum. So the principle of least time is a precise

analog to the Action Principle of classical mechanics.

Now in wave optics we no longer have a principle of least time, but instead we have Huyghens' Principle. This tells how to calculate diffraction patterns when light is passing through a small hole in a screen. (Exact statement of the principle is due to Fresnel and Kirchoff, following the less precise idea of Huyghens).



Let source of light be P, let Q be a fixed point behind the screen at which we observe the light, let R be a variable point in the hole.

Let $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ where λ is the wavelength of the light. Then

Field strength at R produced by point source at P is

$$F(PR) = A \frac{1}{|PR|} e^{ik|PR|} \quad (A23)$$

Field strength at Q produced by point source at R is

$$F(RQ) = B \frac{1}{|RQ|} e^{ik|RQ|} \quad (A24)$$

A and B are constants depending on the source intensity. We suppose the space is empty (except for the screen) and has refractive index everywhere equal 1.

The Huyghens-Fresnel principle now states that the field-strength at Q produced by the source at P is

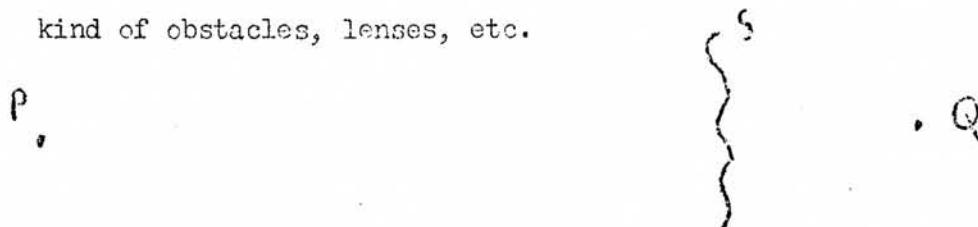
$$\begin{aligned} F(PQ) &= \int dR F(PR) F(RQ) \\ &= AB \int dR \frac{1}{|PR||RQ|} e^{ik[|PR|+|RQ|]} \end{aligned} \quad (A25)$$

where the integration is over the area of the hole, and the variable of integration is the variable point R . The light-intensity at Q is proportional to

$$I(PQ) = |F(PQ)|^2 \quad (A26)$$

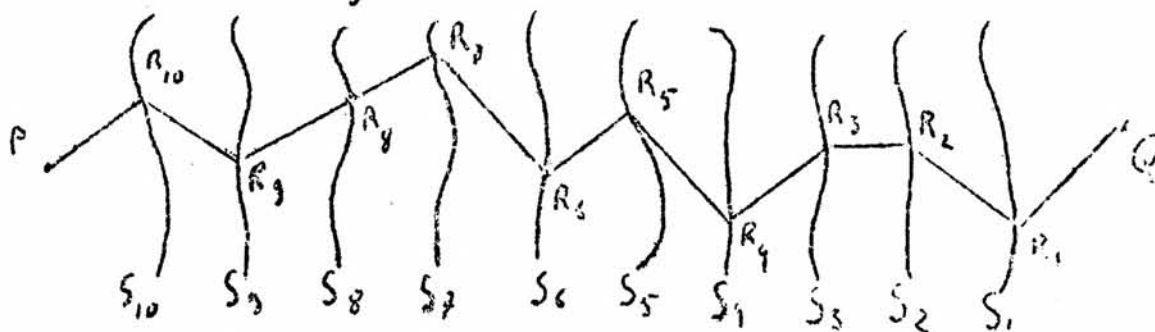
This principle is useful in calculating diffraction patterns in practical cases.

Let us now generalize this principle. Suppose light is traveling in any way from a source P through a space containing any kind of obstacles, lenses, etc.



and is observed at a point Q . Let S be any surface separating P and Q , R a variable point on S . Then

$$F(PQ) = \int_S dR F(PR) F(RQ) \quad (A27)$$



Now take a whole series of surfaces $S_1, S_2, \dots, S_N$ lying between Q and P , then (A27) gives

$$F(PQ) = \int_{s_1} dR_1 \int_{s_2} dR_2 \dots \int_{s_N} dR_N \\ F(PR_N) F(R_N R_{N-1}) \dots F(R_2 R_1) F(R_1 Q) \quad (A28)$$

Suppose the surfaces are now all close together so that each distance $|R_i R_{i-1}|$ is small. Then for $F(R_i R_{i-1})$

we may use the approximation

$$F(R_i R_{i-1}) = \frac{1}{|R_i R_{i-1}|} e^{ik|R_i R_{i-1}|} \\ = \frac{1}{|R_i R_{i-1}|} e^{i\omega T(R_i R_{i-1})} \quad (A29)$$

Here k is the local $\frac{2\pi}{\lambda}$ at the position R_i , since λ is now a function of the local refractive index. $T(R_i R_{i-1})$

is the time taken for a disturbance to travel along the classical ray from R_i to R_{i-1} , and ω is the light frequency which is everywhere constant. Substituting (A29) into (A28) we have

$$F(PQ) = \int_{s_1} dR_1 \int_{s_2} dR_2 \dots \int_{s_N} dR_N \frac{1}{|PR_N| |R_N R_{N-1}| \dots |R_1 Q|} \\ \exp \left[i\omega (T(PR_N) + T(R_N R_{N-1}) + \dots + T(R_1 Q)) \right] \quad (A30)$$

instead of $\int \dots \int \frac{1}{|PR_N| \dots |R_1 Q|}$ we write for short $\int_{\text{paths}}$ (A31)

meaning an integration over all polygonal paths joining P to Q.

And we write

$$T(PR_N) + \dots + T(R_1 Q) = T(\text{path}) \quad (A32)$$

for the classical propagation time along any one path. So

finally for the intensity of light at Q we have the general result

$$I(Q) = |F(PQ)|^2 = \left| \int d\text{paths} \exp \left[e^{i\omega T(\text{path})} \right] \right|^2 \quad (\text{A33})$$

So every possible path contributes to the field-strength

at Q a term whose phase is given just by the classical time-integral along the path.

This principle we now take over directly into the quantum mechanics of a particle, just changing the time-integral into the classical action integral. So here is Feynman's principle of quantization.

Suppose a particle starts from position r_2 at time t_2 . Then the probability that it arrives at position r_1 at time t_1 is

$$P(r_1, t_1, r_2, t_2) = |F(r_1, t_1, r_2, t_2)|^2 \quad (\text{A34})$$

$$F(r_1, t_1, r_2, t_2) = \int d\text{paths} \exp \left[(i/\hbar) I(\text{path}) \right] \quad (\text{A35})$$

where $I(\text{path}) = \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt \quad (\text{A36})$

is the classical action integral taken along any particular path.

To define (A35) more precisely, we suppose a large number of times

$T_N, T_{N-1}, \dots, T_1$ to be chosen between t_2 and t_1 . A path is specified by choosing a position p_i of the particle at each T_i . Let $I(p_i, T_i, p_{i-1}, T_{i-1})$ be the action integral taken along the classical orbit which passes through the position p_i at T_i and p_{i-1} at T_{i-1} . Then (A35) is a short way of writing

$$F(r_1, t_1, r_2, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dr_1 \int dr_2 \dots \int dr_N A_1 A_2 \dots A_N \exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \left(I(r_2, t_2, r_N, \tau_N) + I(r_N, \tau_N, r_{N-1}, \tau_{N-1}) + \dots + I(r_2, \tau_2, r_1, t_1) + I(r_1, t_1, r_2, t_2) \right) \right] \quad (A37)$$

where A_i is a normalization constant depending on the T_i but not on r_1 and r_2 , and we suppose that every time-interval (τ_i, τ_{i-1}) tends to zero as $N \rightarrow \infty$. Each $\int dr_i$ is an integral over the whole volume of space.

Thus we see that $\int dr$ paths in (A35) is an integral over all paths which begin at r_2 at time t_2 and end at r_1 at time t_1 .

The Huyghens principle in optics describes propagation of light in space, while wave-mechanics describes propagation of particle probability in time. So the surfaces S_i of the Huyghens principle become in wave-mechanics 3-dimensional, i.e. they consist of the whole space at a particular time T_i .

Important Note. The Huyghens-Fresnel principle in wave-optics is only approximately valid, because the wave-equation is a second-order equation and so the propagation through a surface requires a knowledge of the field-strength and its derivative on the surface. The exact principle was formulated by Kirchhoff and is rather more complicated. However, in wave-mechanics the Schrödinger equation is only first order in time, and hence the Huyghens principle in its simple form is exact.

So we take (A34) - (A36) as the precise statement of the basic laws of quantum mechanics for a single particle moving under forces specified by the Lagrangian L . No other information is needed in order to calculate the behavior of the particle.

We use the Dirac notation $|r_2, t_2\rangle$ for the state in which the particle is known to be at r_2 at time t_2 . The transition amplitude from this state to the state $|r_1, t_1\rangle$ is then written

$$\langle r_1, t_1 | r_2, t_2 \rangle = F(r_1, t_1; r_2, t_2) \quad (A38)$$

and is given by (A35).

Lastly we define what we mean by an operator in the Feynman quantum mechanics. Let $O(q, t)$ be any classical function of the particle's position and velocity at the time t . Then the corresponding quantum-mechanical operator is defined as the Matrix $O(q, t)$ whose matrix element between the states $|r_2, t_2\rangle$ and $|r_1, t_1\rangle$ is given by

$$\begin{aligned} \langle r_1, t_1 | O(q, t) | r_2, t_2 \rangle \\ = \int d \text{ path} \quad O_{\text{path}}(q, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(\text{path}) \right] \end{aligned} \quad (A39)$$

where $O_{\text{path}}(q, t)$ is the value of the classical function at the point where the particle is, on a particular path at time t . This definition (A39) holds for any two times t_1, t_2 such that

$$t_2 < t < t_1$$

The Feynman Quantization for Field Theory

This method of quantization can now be taken over directly from particle to field mechanics. The result is equations (174) (175) of the AQM notes. The trick is just to follow precisely the table of Particle-Field analogs given on page 6. Thus instead of a sum over paths of a particle during a time-interval $t_2 - t_1$, we have a sum over histories of the field within a space-time region Ω . By a history we mean any set of functions $\phi^\alpha(x)$ which are defined in Ω and take specified values $\phi_1'^\alpha$ and $\phi_2'^\alpha$ on the boundary of Ω . We find the definitions of the field theory quantization in the AQM notes pages 52-54.

Note on notations.

For the eigenvalues of the field $\phi^\alpha(x)$ in a particular state we use the notation $\phi'^\alpha(x)$.

For the eigenvalues of particle coordinates q^α we use the notation q'^α .

If there is only one particle we write r_1 or r_2 instead of q'^α . The q'^α is more general as it may represent coordinates of several particles.

The Schwinger Action Principle for Particle Mechanics

We now translate the Feynman quantization rules (A35) and (A56) into a usable form in which the $\int d$ paths does not appear. The result will be the Action Principle of Schwinger, a generalization

of the classical principle of least action including information about the effects of variations which do not vanish at the end of the time-interval considered. We derive this principle here for the case of particle mechanics. The method is exactly the same for field theory and is done in the AQM notes pages 54-56.

Let the points r_1 and r_2 in (A35) be held fixed. Let each path in the sum be varied by changing $q^a(t)$ to $q^a(t) + \delta q^a(t)$ for $t_1 \leq t \leq t_2$, and also by changing t_1, t_2 to $t_1 + \delta t_1$ and $t_2 + \delta t_2$. The result of such a double variation is according to (A35) and (A39).

$$\delta \langle r_1, t_1 | r_2, t_2 \rangle = \int d\text{path} (i/\hbar) \delta I(\text{path}) \exp \left(\frac{i}{\hbar} I(\text{path}) \right) \\ = (i/\hbar) \langle r_1, t_1 | \delta I | r_2, t_2 \rangle \quad (\text{A40})$$

This formula (A40) is the Schwinger Action Principle.

The operator δI is the result of the double variation upon the integral (A36). The result of the variations may be computed exactly as in the classical theory, according to (A5) and (A14).

So we find

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \right\} dt \\ + \sum_a \left[p_a \Delta q^a(t_1) - p_a \Delta q^a(t_2) \right] - \left[H(t_1) \delta t_1 - H(t_2) \delta t_2 \right] \quad (\text{A40})$$

For the one-particle case, p_a and H are given by (A16) and (A17), these expressions now all being operators.

Now what is the meaning of this double variation as applied to (A35)? Since the sum is over all paths, the change of the path-coordinates from $q^\alpha(t)$ to $q^\alpha(t) + \delta q^\alpha(t)$ does not change the value of the sum, except that it changes the points at which the paths are supposed to begin and end. The coordinates $q^\alpha(t) + \delta q^\alpha(t)$ may be taken as integration variables instead of $q^\alpha(t)$. So the variation of $q^\alpha(t)$ means simply this, that each path in the sum begins at $z_2 + \delta q^\alpha(t_2)$ at time t_2 , and ends at $z_1 + \delta q^\alpha(t_1)$ at time t_1 . So as far as this part of the variation is concerned

$$\delta \langle z_1, t_1 | z_2, t_2 \rangle = \langle z_1 + \delta q^\alpha(t_1), t_1 | z_2 + \delta q^\alpha(t_2), t_2 \rangle - \langle z_1, t_1 | z_2, t_2 \rangle \quad (A42)$$

When t_1 and t_2 are also varied, it means that the sum is taken over all paths which begin at

$$z_2 + \dot{q}^\alpha(t_2) \delta t_2 + \delta q^\alpha(t_2) = z_2 + \Delta q^\alpha(t_2) \quad (A43)$$

at time $t_2 + \delta t_2$, and end at

$$z_1 + \dot{q}^\alpha(t_1) \delta t_1 + \delta q^\alpha(t_1) = z_1 + \Delta q^\alpha(t_1) \quad (A44)$$

at time $t_1 + \delta t_1$. So we could write for the double variation

$$\delta \langle z_1, t_1 | z_2, t_2 \rangle = \langle z_1 + \Delta q^\alpha(t_1), t_1 + \delta t_1 | z_2 + \Delta q^\alpha(t_2), t_2 + \delta t_2 \rangle - \langle z_1, t_1 | z_2, t_2 \rangle \quad (A45)$$

Formula (A45) is however only symbolic, because $\Delta q^\alpha(t)$ is not a number but an operator depending on $\dot{q}^\alpha(t)$. So (A45) is to be interpreted in the sense that

$$|r_1 + \Delta q^\alpha(t_1), t_1 + \Delta t_1\rangle \quad (A 46)$$

is the state in which the operator $q^\alpha(t_1) - \Delta q^\alpha(t_1)$ has the eigenvalue r_1 at time $t_1 + \Delta t_1$

Equivalence of the Schwinger Action Principle with Ordinary Quantum Mechanics

We next show how the rules of ordinary particle quantum mechanics can be deduced immediately from (A40) and (A41).

A. The Operator equations of Motion

Consider an arbitrary variation $\delta q^\alpha(t)$ vanishing at t_1 and t_2 , and take $\delta t_1 = \delta t_2 = 0$. Then by (A42)

$$\delta \langle r_1, t_1 | r_2, t_2 \rangle = 0 \quad (A 47)$$

and by (A40)

$$\langle r_1, t_1 | \delta I | r_2, t_2 \rangle = 0 \quad (A48)$$

As (A48) is true for all states $|r_1, t_1\rangle$ and $|r_2, t_2\rangle$ we have as an operator identity

$$\delta I = 0 \quad (A49)$$

Since δq^α is arbitrary for $t_1 < t < t_2$, (A49) and (A41) give the operator equations

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = 0 \quad (A50)$$

just as in classical mechanics.

B. The Commutation Rules

We define

$$\psi(r_1, t_1) = \langle r_1, t_1 | r_2, t_2 \rangle \quad (A51)$$

to be the wave-function of the particle in the state $|r_2 t_2\rangle$.

Consider a variation with $\delta q^\alpha(t_1) \neq 0$, $\delta q^\alpha(t_2) = \delta t_1 = \delta t_2 = 0$

Then (A42) gives

$$\delta \psi(r, t) = \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \psi(r, t) \right] \delta q^{\alpha}(t_1) \quad (\text{A52})$$

while (A40) and (A41) give

$$\delta \psi(r, t) = (i/\hbar) \langle r, t | \sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta q^{\alpha}(t_1) | r_2 t_2 \rangle \quad (\text{A53})$$

Therefore, since $\delta q^{\alpha}(t_1)$ is arbitrary

$$\langle r, t | p_{\alpha} | r_2 t_2 \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \psi(r, t) \quad (\text{A54})$$

That is to say, the wave-function of the state

$$|p_{\alpha} r_2 t_2\rangle \text{ is } -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \psi(r, t) \quad (\text{A55})$$

Since every state is a linear combination of states $|r_2 t_2\rangle$,

we can say quite generally that p_{α} operating on the state with wave-function $\psi(r, t)$ gives the state with wave-function

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \psi(r, t)$. We write this as an operator identity

$$p_{\alpha} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \quad (\text{A56})$$

meaning that both sides of (A56) produce the same effect on any

wave-function $\psi(r, t)$. From (A56) we deduce in the usual way

the canonical commutation rule. For every ψ

$$\begin{aligned} [q^{\beta}, p_{\alpha}] \psi(r, t) &= (q^{\beta} p_{\alpha} - p_{\alpha} q^{\beta}) \psi(r, t) \\ &= r^{\beta} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \right) \psi - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \right) (r^{\beta} \psi) \\ &= i\hbar \delta_{\alpha\beta} \psi(r, t) \end{aligned} \quad (\text{A57})$$

and hence the operator identity

$$[q^\beta, p_\alpha] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A58})$$

C. The Schrödinger Equation.

Consider a variation with $\delta q^\alpha(t_1) \neq 0, \delta t_1 \neq 0,$
 $\delta q^\alpha(t_2) = \delta t_2 = 0$. Then (A45) gives to first order in Δq^α and δt_1

$$\begin{aligned} \delta \psi(r, t_1) = & \delta t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} \psi(r, t_1) \\ & + \langle r, \Delta q^\alpha(t_1), t_1 | r_2, t_2 \rangle - \langle r, t_1 | r_2, t_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A59})$$

According to (A46), the state $|r, \Delta q^\alpha(t_1), t_1\rangle$

is defined by the eigenvalue equation

$$(q^\alpha(t_1) - \Delta q^\alpha(t_1) - r_1) |r, \Delta q^\alpha(t_1), t_1\rangle = 0 \quad (\text{A60})$$

Multiplying this equation on the left by $(1 + \frac{i}{\hbar} p_\alpha \Delta q^\alpha)$
 and using (A58),

$$\begin{aligned} (1 + \frac{i}{\hbar} p_\alpha \Delta q^\alpha) (q^\alpha - \Delta q^\alpha - r_1) |r, \Delta q^\alpha, t_1\rangle \\ = (q^\alpha(t_1) - r_1) (1 + \frac{i}{\hbar} p_\alpha \Delta q^\alpha) |r, \Delta q^\alpha, t_1\rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{A61})$$

So $(1 + \frac{i}{\hbar} p_\alpha \Delta q^\alpha) |r, \Delta q^\alpha, t_1\rangle$ is the eigenstate of $q^\alpha(t_1)$ with eigenvalues r_1 .

Therefore

$$(1 + \frac{i}{\hbar} p_\alpha \Delta q^\alpha) |r, \Delta q^\alpha, t_1\rangle = |r, t_1\rangle$$

and to first order in Δq^α

$$|r, \Delta q^\alpha(t_1), t_1\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar} p_\alpha(t_1) \Delta q^\alpha(t_1)) |r, t_1\rangle \quad (\text{A62})$$

Inserting this in (A59), we have

$$\delta \psi(r, t_1) = \delta t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} \psi(r, t_1) + \frac{i}{\hbar} \langle r, t_1 | p_\alpha(t_1) \Delta q_\alpha(t_1) | r_2, t_2 \rangle \quad (\text{A63})$$

The action principle (A40) with (A41) gives

$$\delta \psi(r, t_1) = (i/\hbar) \langle r, t_1 | \sum_\alpha p_\alpha \Delta q_\alpha(t_1) - H(t_1) | r_2, t_2 \rangle \quad (\text{A64})$$

Comparing (A63) and (A64),

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -(i/\hbar) \langle r, t | H(t) | r_2, t_2 \rangle \quad (\text{A65})$$

This is the ordinary Schrödinger equation in Dirac's notation.

It says that for any state S with wave-function $\psi(r, t)$, the state $H(t)S$ has wave-function $i\hbar (\partial\psi/\partial t)$. If, as usual in wave-mechanics, we identify each state with its wave-function, we obtain the usual form of the Schrödinger equation

$$H(t) \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) \quad (\text{A66})$$

Transition to Field Theory

We have seen how for particle mechanics the Feynman quantization process leads to the Schwinger action principle, and the action principle leads to all the usual rules of quantum mechanics. The corresponding arguments for a field theory go through in exactly the same way. The details are explained in the following pages 54-62.

In the case of field theory, we are interested not only in deducing the usual rules of quantum mechanics from the action principle. We also want to deduce other useful consequences of

the action principle, which make this approach to quantum field theory simpler than the old-fashioned approach. Especially useful for practical applications is the Peierls commutation rule (194) of the AQM notes . This formula holds also in practical mechanics but it is of practical importance only in field theory. All the equations leading up to Eq. (194) of the AQM notes have analogs in particle mechanics. We leave it as an exercise to the reader to work these out.

Only the final section G of the AQM notes, on anticommuting fields, has no analog in particle mechanics.

On the Relation between Scattering Matrix
Elements and Cross-sections.

by

F.J. LYTTON

Ecole d'Eté de Physique Théorique, Les Houches, France

----00----

Consider a reaction or scattering process in which particles 1, 2 collide and produce the reaction products 3, 4, ..., n. For $j = 1, \dots, n$ we suppose that particle j has momentum-energy 4-vector $\hbar k_j$ the fourth component of which is $E_j/c = \hbar K_{j0}$ where E_j is the energy. Let particle j also have internal coordinates u_j specifying what type of particle it is, and what is its state of spin or polarization.

From relativistic quantum mechanics we will usually calculate directly the part of the S-matrix or scattering operator giving rise to this reaction. The form of the S-matrix will be :

$$S = \int \dots \int d_3 k_1 \dots d_3 k_n \sum_{u_1 u_n} a_1 a_2 a_3^* \dots a_n^* \times \delta_4 (k_1 + k_2 - k_3 \dots - k_n) M \quad (1)$$

Here a_j is an absorption operator and a_j^* an emission operator for particle j , conveniently normalized by the prescription :

$$\langle a_{ku} a_{k'u'}^* \rangle_0 = \delta_3 (k - k') \quad u u' \quad (2)$$

where the bracket denotes an expectation value in the vacuum state. M is the matrix element proper, a covariant function of the vectors k_j and the internal coordinates u_j .

One wishes to have a formula for the reaction cross-section in terms of M . Such formulae are to be found in many places in published literature¹, but the derivation of them is usually rather awkward. The purpose of this note is to give a simple and rigorous derivation.

Let Ω be any subset of the final state momenta, i.e. a subset of the $3(n-2)$ dimensional space of the 3-vectors $k_3, k_4, \dots, k_n$. We denote by $\sigma(\Omega)$ the cross-section for a reaction in which the final momenta $k_3, k_4, \dots, k_n$ belong to Ω , the internal coordinates $u_1, \dots, u_n$ and the initial momenta k_1, k_2 being specified. Thus $\sigma(\Omega)$ is a function of $k_1, k_2, u_1, \dots, u_n$ and Ω , and we wish to find the relation between $\sigma(\Omega)$ and M .

To define $\sigma(\Omega)$ we use an initial state Ψ_1 with the form of a wave packet :

$$\Psi_1 = \iint d_3 p_1 d_3 p_2 f(p_1, p_2) a_{p_1}^\dagger u_1 a_{p_2}^\dagger \bar{\Psi}_0 \quad (3)$$

where $\bar{\Psi}_0$ is the vacuum-state and $f(p_1, p_2)$ is almost, but not quite, a product of δ -functions

$$f(p_1, p_2) \sim \delta_3(p_1 - k_1) \delta_3(p_2 - k_2). \quad (4)$$

Using (2), the normalization condition for Ψ_1 , is

$$|\Psi_1|^2 = \iint d_3 p_1 d_3 p_2 |f(p_1, p_2)|^2 = 1 \quad (5)$$

It is impossible to satisfy (5) with f equal to a real δ -function, and for this reason we use the wave-packet form for Ψ_1 . The scattered wave arising from Ψ_1 is given by

$$S \Psi_1 = \int \dots \int d_3 p_1 d_3 p_2 d_3 k_3 \dots d_3 k_n a_3^* \dots a_n^* \Psi_0 \\ \times f(p_1, p_2) \delta_4(p_1 + p_2 - k_3 \dots - k_n) M \quad (6)$$

The squared modulus of (6) represents the probability of scattering from the initial state Ψ_1 . Thus the probability for scattering into final states with momenta in Ω is given by (6) and (2), and is

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} d_3 k_3 \dots d_3 k_n \iiint d p_1 d p_2 d p'_1 d p'_2 |M|^2 \\ \times f(p_1, p_2) f^*(p'_1, p'_2) \delta_4(p_1 + p_2 - k_3 \dots - k_n) \delta_4(p'_1 + p'_2 - k_3 \dots - k_n) \\ = \int_{\Omega} d_3 k_3 \dots d_3 k_n \iiint d p_1 d p_2 d p'_1 d p'_2 |M|^2 f(p_1, p_2) f^*(p'_1, p'_2) \\ \times \delta_4(k_1 + k_2 - k_3 \dots - k_n) \delta_4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \quad (7)$$

In (7) we suppose M to depend only on $k_1, k_2, \dots, k_n$ and not on p_1, p_2, p'_1, p'_2 since f and f^* are almost δ -functions.

Consider now the probability W_A that in the initial state Ψ_1 the particle 2 will pass through a small area A which is travelling along with particle 1. We suppose that the velocity of 1 and 2 are in the same line (this can always be arranged by choosing a suitable reference system) and that the area A is perpendicular to this line.

If A is very small,

$$W_A = \int d_3 x \int_{-\infty}^{+\infty} dt A v \int (x, x, t) \quad (8)$$

where v is the relative velocity of particles 1 and 2, and $\rho(x, y, t)$ is the probability density for finding particle 1 at x and particle 2 at y at the time t in the state Ψ_1 . According to (3)

$$\rho(x, y, t) = \left| \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d_3 p_1 d_3 p_2 f(p_1, p_2) e^{i(p_1 x + p_2 y - (p_1 + p_2)ct)} \right|^2 \quad (9)$$

and this gives with (8)

$$W_A = \frac{A v}{(2\pi)^2 c} \iiint d_3 p_1 d_3 p_2 d_3 p'_1 d_3 p'_2 \delta_4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) f(p_1, p_2) f^*(p'_1, p'_2) \quad (10)$$

The definition of the reaction cross-section is

$$\sigma(\Omega) = W(\Omega) \left(A / v_A \right) \quad (11)$$

It is the reaction probability in the state Ψ_1 , divided by the probability for the two particles to pass within unit area of each other. Comparing (7) with (10)

$$\sigma(\Omega) = (2\pi)^2 \frac{c}{v} \int_{\Omega} d_3 k_3 \dots d_3 k_n \delta_4(k_1 + k_2 - k_3 \dots k_n) |M|^2 \quad (12)$$

$$= (2\pi)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{v} \int_{\Omega} d_3 k_3 \dots d_3 k_{n-1} \delta(E_1 + E_2 - E_3 \dots E_n) |M|^2 \quad (13)$$

The required formulae for $\sigma(\Omega)$ are (12) and (13). In (13) it is

implied that k_n, E_n be expressed as functions of $k_3, \dots, k_{n-1}$ by using the equation of momentum conservation.

For the case of a reaction with only two products ($n = 4$) the formulae may be simplified. In this case we may define an ordinary differential cross-section $\sigma d\Omega$ by taking for Ω the set of final states in which the direction of the outgoing particle 3 lies in a given small solid angle $d\Omega$. Given $d\Omega$, the magnitude of k_3, k_4, E_3, E_4 are fixed by momentum and energy conservation. Let us work in the centre of mass system so that $|k_3| = |k_4|$. Then (13) becomes

$$\begin{aligned} \sigma d\Omega &= (2\pi)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{V} k_3^2 |M|^2 \int \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) dk_3 d\Omega \\ &= \frac{(2\pi)^2}{\hbar V} \frac{k_3 E_3 E_4}{E_3 + E_4} |M|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

Remembering that V is the relative velocity in the initial state, the relative velocity in the final state is

$$V' = \hbar^2 c^2 k_3 (E_3 + E_4) / E_3 E_4$$

Therefore we have the compact formula for the differential cross-section

$$\sigma d\Omega = \frac{c^2}{V V'} (2\pi k_3)^2 |M|^2 d\Omega. \quad (15)$$

If the two initial particles are identical, or if some of the final particles are identical, all these results remain valid without change, provided that in formula (1) the integrals are restricted so that

each physically distinguishable state is counted only once. For example, if particles 1 and 2 are identical we shall sum over pairs of values (k_1, u_1, k_2, u_2) in (1), taking (k_1, u_1, k_2, u_2) and (k_2, u_2, k_1, u_1) to be the same pair so that one and not both is included. This corresponds to the usual practice in such cases, when M is calculated as a matrix element between two physical states containing identical particles.

Reference :

¹. C. MØLLER, Kgl. Dansh. Vidensh. 1sk. Mat.-Fys. Medd. 23, 1 (1945).

The formulae in question are equations (91) and (96), the derivation occupies pages 18-24.

RENORMALISATION

Ecrivons la densité de lagrangien qui donne les équations de mouvement des champs interagissant.

$$L = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2 - \hbar c \bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \hat{\mu} \right) \psi - e \hat{\bar{\psi}} \hat{A} \hat{\psi} - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^e \hat{F}_{\mu\nu}^e - \frac{1}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^e - i e \hat{\bar{\psi}} \hat{A}^e \hat{\psi}.$$

ce qui inclut un champ électromagnétique externe, décrit par $\hat{A}^e$ pour lequel nous supposons $\frac{\partial \hat{A}_\mu^e}{\partial x_\mu} = 0$, et le terme supplémentaire $-\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2$ on introduit le facteur $\frac{1}{\lambda}$ dans le deuxième terme, ce qui ne produit pas d'effet sur les états physiques à cause de la condition supplémentaire de Fermi.

Nous supposons maintenant comme hypothèse de travail que les champs ayant des éléments de matrice finis entre les états physiques ne sont pas ceux qui figurent dans le lagrangien, mais des champs proportionnels :

$$A_\mu(x) = Z_3^{-1/2} \hat{A}_\mu(x)$$

$$A_\mu^e(x) = Z_3^{-1/2} \hat{A}_\mu^e(x)$$

qui se transformeront eux aussi comme un potentiel électro-magnétique à la fois pour les transformations de Lorentz et celles de Jauge.

On ne peut prendre $A_\mu = \hat{A}_\mu$. On sait, en effet, que les éléments de matrice de $\hat{A}_\mu$ sont divergents calculés à l'ordre e^2 . Pour $A_\mu^e(x)$, la constante de proportionnalité doit être la même que pour $A(x)$ à cause

de l'arbitraire qu'il y a dans la distinction entre un champ A_μ et un champ extérieur.

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= Z_2^{-1/2} \hat{\Psi}(x) \\ \bar{\Psi}(x) &= Z_2^{-1/2} \hat{\bar{\Psi}}(x)\end{aligned}$$

On a choisi Z_2 (ainsi que les autres Z) réel. Nous verrons par la suite que ce choix est possible en raison de l'expression de Z_2 en fonctions des constantes (e , m).

Les nouveaux champs sont appelés champs renormalisés. Le fait qu'ils ont des éléments de matrice finis sera vérifié après coup.

On renormalise également la charge et la masse par les formules

$$\begin{aligned}\hat{e} &= Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e \quad \text{dont l'interprétation est donnée par la formule} \\ \hat{e} \hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi} &= Z_1 e \bar{\Psi} A \Psi, \text{ et la nouvelle masse est donnée par } \hat{\mu} = \mu (1 - Z_2^{-1} \gamma) \\ \text{ce qui donne}\end{aligned}$$

$$\hbar c \hat{\bar{\Psi}} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \hat{\mu} \right) \hat{\Psi} = \hbar c Z_2 \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu \right) \Psi - \hbar c \gamma_\mu \bar{\Psi} \psi$$

ce qui donne l'interprétation de γ .

Représentation d'interaction.

On aura une interprétation d'interaction en séparant dans L les deux parties

$$L = L_0 + L_1$$

L_0 étant le lagrangien des champs libres renormalisés avec les constantes renormalisées

$$\begin{aligned}L_0 &= -\hbar c \hat{\bar{\Psi}} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \hat{\mu} \right) \hat{\Psi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^c - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^c F_{\mu\nu}^c \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_1 = & \underset{(5)}{-ie \bar{\Psi} A \Psi} - \underset{(6)}{ie \bar{\Psi} A^e \Psi} + \underset{(7)}{ie L \bar{\Psi} A \Psi} + \underset{(8)}{ie L \bar{\Psi} A^e \Psi} \\
 & - \underset{(9)}{\frac{1}{4} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^e - \frac{1}{4} C F_{\mu\nu}^e F_{\mu\nu}^e - \hbar c \mu \bar{\Psi} \Psi \\
 & + \hbar c B \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu \right) \Psi
 \end{aligned}$$

avec $C = Z_3 - 1$, $B = Z_2 - 1$, $L = 1 - Z_1$.

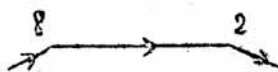
On a choisi la constante $\lambda = Z_3 - 1$ de façon à faire disparaître dans L_1 le terme $-\frac{1}{2} (\lambda Z_3 - 1) \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2$. Ce choix, s'il n'est pas nécessaire, simplifie l'expression; c'est pourquoi on avait introduit le terme en λ .

On voit maintenant qu'on a 9 termes au lieu des 2 premiers dans le lagrangien d'interaction les 7 termes supplémentaires étant des contre-terme dont les coefficients seront choisis de façon que dans le calcul d'un processus donné à n'importe quel ordre, les divergences provenant des termes 1 et 2 soient éliminées et qu'il ne reste que des parties finies provenant de l'interaction 1 et 2.

Pour traiter un exemple, examinons les éléments du 2ème ordre de la matrice de diffusion d'un électron par un potentiel A^e . On cherche les éléments de matrice qui contiennent $(A)^2 A^e$.

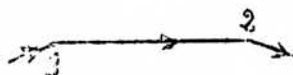
Terme de L_1	Diagramme	Contribution à M
(1, 2)		$M_2^1 + L_2 M_0$
2		M_0
(1, 2)		$M_2^2 + C_2 M_0$
(1, 2)		$(L_m M_0) + B_2 M_0$
(4)		$- L M_0$

(8, 2)



- $(Y M_0)$

(3, 1)



- $B M_0$

(4, 5)



- $C_2 M_0$

On a formé ainsi tous les termes du 2ème ordre que l'on pouvait former avec les éléments de L_1 , en remarquant que les termes 3 et 5 ne contribuent rien parce que les constantes C et L sont déjà d'ordre e^2 au moins, et que 7 ne contribue rien parce qu'il représente l'action du champ extérieur agissant deux fois. Il suffit pour voir comment est formé le diagramme ci-dessus de se souvenir du diagramme élémentaire correspondant à chaque facteur de

(1)



(2)



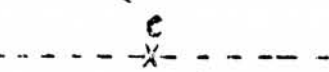
(3)



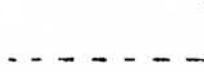
(4)



(5)



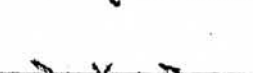
(6)



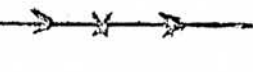
(7)

* { (ce terme étant un "c-nombre", il est représenté graphiquement par un point sans ligne externe).

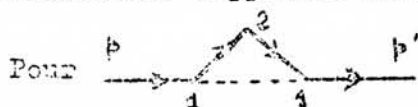
(8)



(9)



Indiquons le calcul des éléments de matrice qui figurent dans le tableau. Le calcul des éléments correspondant à l'interaction 1, 2 a déjà été fait antérieurement. Rappelons brièvement leur forme.



, d'après les règles de Feynman, l'é-

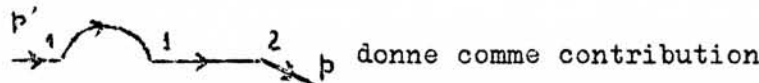
lément de matrice est de la forme

$$M \approx e_{\mu} (\bar{u} \int \frac{dk}{k^2} \gamma_{\alpha} \frac{1}{p-k-i\mu} \gamma_{\mu} \frac{1}{p-k-i\mu} \gamma_{\alpha} u)$$

qui diverge logarithmiquement et que l'on peut écrire sous la forme

$$M = L_2 (\bar{u} \not{\epsilon} u') + M_2^1 = L_2 M_0 + M_2^1.$$

la partie finie M_2^1 étant définie par le fait que $M_2^1 = 0$ pour $p = p' = p_0$,
moment d'une particule libre, parce que nous voulons définir le terme M_0
comme comprenant toute la diffusion observée dans la limite des très petits
transferts de moment.



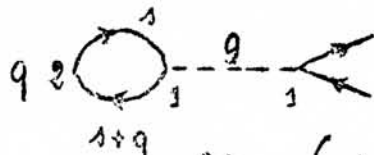
donne comme contribution

$$M \approx \int \frac{dk}{k^2} (\bar{u}' \gamma_{\mu} \frac{1}{p'+k-i\mu} \gamma_{\mu} \frac{1}{p-i\mu} \not{\epsilon} u)$$

dont on trouve l'expression

$$M = (\delta_m M_0) + B_2 M_0.$$

La parenthèse signifie que l'on n'a pas un véritable multiple de M_0 par une
constante.



a pour expression

$$M \approx \int ds \frac{1}{q^2} (\bar{u}' \gamma_{\lambda} u) T_1 \left(\gamma_{\lambda} \frac{1}{s+q-i\mu} \not{\epsilon} \frac{1}{s-i\mu} \right)$$

a pour expression $(\bar{u}' \not{\epsilon} u)$

Il nous reste à calculer les termes correspondant aux processus

(4), (8, 2), (9, 2), (1, 6).

Pour (4), l'expression est évidemment $-L M_0$.

(8, 2) donne

$$\begin{aligned} M &= -Y \int p (\bar{\psi} \psi \bar{\psi} A^c \psi) = -Y \int dx_0 dx_1 \bar{\psi}(x_0) S_F(x_0-x_1) A^c(x_1) \psi \\ &= -Y (\bar{u} \frac{1}{p-i\mu} \not{\epsilon} u'). \end{aligned}$$

que nous désignons par la notation $-(Y M_0)$. La parenthèse signifie comme

précédemment que l'on n'a pas un multiple de M_0 par une constante; mais dans tous les cas, la compensation avec le terme δ_m aura lieu si l'on prend pour γ le développement que l'on indique en fonction de la constante de couplage.

Contribution de 9. 2.

$$M = -B \iint P \left(\bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu \right) \Psi, \bar{\Psi} A' \Psi \right) = -B \left(\bar{u} (\not{p} - i\mu) \frac{1}{\not{p} - i\mu} \not{e} u \right) \\ = -\frac{1}{2} B M_0.$$

en effet, les considérations développées antérieurement dans le cours montrent que l'on doit attribuer au produit $(\not{p} - i\mu) \frac{1}{(\not{p} - i\mu)}$ la valeur $\frac{1}{2}$.

Calcul du terme 1. 6.

$$M = \frac{1}{2} C \iint P \left(\Gamma_{\mu\nu}^e \Gamma_{\mu\nu}(x_1), \bar{\Psi} A_\alpha \gamma_\alpha \Psi(x_2) \right) dx_1 dx_2 \\ = \frac{1}{2} C \iint P \left[\left(\frac{\partial A_\nu^e}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu^e}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right), \bar{\Psi} \gamma_\alpha \Psi(x_2) A_\alpha(x_2) \right] dx_1 dx_2$$

En passant dans l'espace des moments en remplaçant

$$A_\nu^e(x) = \int dq e_\nu(q) e^{iqx} \\ M = \frac{1}{2} C \left\{ (q_\mu e_\nu - q_\nu e_\mu) (q_\mu \delta_{\nu\alpha} - q_\nu \delta_{\mu\alpha}) \frac{1}{q^2} (\bar{u} \gamma_\alpha u') \right. \\ = C \left[q^2 e_\alpha - e \cdot q q_\alpha \right] \frac{1}{q^2} (\bar{u} \gamma_\alpha u') \\ = \frac{C}{q^2} \left[q^2 (\bar{u} \not{q} u') - (e, q) (\bar{u} \not{e} u') \right]$$

Si l'électron est libre, on a $\bar{u} \not{q} u' = 0$ à cause de l'équation de Dirac.

Donc $M = (C M_0)$, (la parenthèse ayant toujours la même signification que précédemment), c'est à dire qu'il faudra prendre $C = \frac{C_2}{2} + \dots$

Finalement, on aura donc une éliminations des divergences du 2ème ordre

si l'on suppose que les coefficients L, B, γ, C ont respectivement pour

termes du même ordre du développement en e

$$\hat{L}_2 = U_2, Y_2 \dots$$

Invariance de jauge de la théorie.

Le lagrangien doit être inchangé lors de la transformation

$$\psi \rightarrow e^{i \frac{e}{\hbar c} \Lambda} \psi$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}$$

Λ étant une fonction arbitraire (c-nombre), e étant la charge expérimentale (charge renormalisée), parce que dans la limite classique le coefficient $\frac{e}{\hbar c}$ est la charge expérimentale.

Condition d'invariance.

Le lagrangien initial était invariant pour la transformation

$$\psi \rightarrow e^{-i \frac{e}{\hbar c} \hat{\Lambda}} \psi$$

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A} + \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial x_\mu}$$

Le nouveau lagrangien sera donc invariant dans la transformation

$$\psi \rightarrow e^{-i \frac{e}{\hbar c} \hat{\Lambda}} \psi, \text{ si on prend } \hat{\Lambda} = Z_3^{-1/2} \Lambda$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial x_\mu}, \text{ puisque } \hat{A}_\mu = Z_3^{-1/2} A_\mu$$

La condition d'invariance de jauge est donc

$$\hat{e} \hat{\Lambda} = e \Lambda \quad \text{ou} \quad \hat{e} \hat{A} = e A$$

$$\text{Puisque } \hat{e} = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e, \quad Z_1 = Z_2$$

ou $B + L = 0$, identité de Ward.

Lorsqu'on fait le calcul par la méthode des perturbations, on trouve effectivement $B + L = 0$.

Possibilité de renormalisation à tous les ordres.

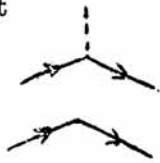
L'interaction originale étant $\bar{\psi} \not{A} \psi + \bar{\psi} \not{e} \psi$ que nous appellerons l'opérateur O ,

- 1) nous nous proposons d'examiner l'élément de matrice le plus général que l'on peut former avec 0,
- 2) d'examiner son type de divergence,
- 3) de vérifier terme à terme que l'on peut l'éliminer par un des éléments d contre-terme, c'est à dire que l'on a introduit suffisamment de constantes infinies dans la théorie.

L'élément de matrice M_G le plus général est

$$M_G = \iiint d x_1 \dots d x_{m+n} P \left[\bar{\psi} \not{x} \psi(x_1) \dots, \bar{\psi} \not{x} \psi(x_n), \bar{\psi} \not{x}^e \psi(x_{n+1}) \dots, \bar{\psi} \not{x}^e \psi(x_{m+n}) \right]$$

Le diagramme G correspondant à (m+n) sommets, dont

$$\begin{cases} n \text{ avec 2 lignes d'électrons et 1 de photon} \\ m \text{ avec 2 lignes d'électrons et 0 de photon} \end{cases}$$


L'expression de l'élément de matrice M_G est donné dans l'espace des moment par les règles de Feynman comme le produit des facteurs suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ligne électronique interne} \quad \frac{1}{\not{k}_j - i\mu} \\ \text{ligne électronique interne} \quad \frac{1}{k_j^2} \delta_{\lambda\mu} \end{array} \right\} \text{ variables } k_j$$

ligne électronique externe spineurs u_j ou $\bar{u}_j$,

ligne de photon externe e_j

potentiel de champ externe $\phi(q_j)$.

Pour chaque sommet, on a d'une part le facteur γ_μ , d'autre part une variable x_i telle qu'en effectuant l'intégration $\int d x_i$ on ait le résultat $\delta_4(k + k' - p)$ qui exprime la conservation des quadrimoments.

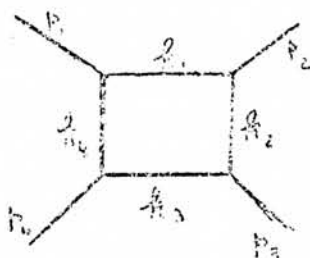
On aura alors à effectuer les intégrations sur les moments

$$\int \dots \int d k_1 d k_2 \dots d q_1 \dots d q_f$$

l'intégration, sur les variables correspondant à des lignes internes, étant des intégrales au sens de Feynman.

Examinons maintenant les types de divergence :

Les fonctions δ_4 pour les $m + n$ sommets permettent l'élimination de $m + n - 1$ variables k_j en fonction des autres. Par exemple, si G a la forme indiquée, on a



$$k_2 = k_1 - p_2$$

$$k_3 = k_1 - p_2 - p_3$$

$$k_4 = k_1 - p_2 - p_3 - p_4$$

la dernière fonction δ_4 donne uniquement

$$k_1 = k_1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4$$

$$\text{ou } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.$$

Si l'on désigne par

I_e le nombre de lignes électroniques internes,

I_p " " photoniques internes,

O_e " " électroniques externes,

O_p " " photoniques externes,

O_v le nombre de sommets où agit A^e ,

le nombre de variables d'intégration qui reste après l'élimination par les fonctions est

$$I_e + I_p - m - n + 1,$$

et l'intégrale est de la forme

$$\int \dots \int d^4 k_1 \dots d^4 k_f \prod_{I_e} (k_j - i\mu)^{-1} \prod_{I_M} (k_j)^{-2}$$

Pour commencer, analysons d'abord de manière formelle en comptant les puissances la convergence de l'intégrale à l'infini. La différence entre le "degré" du numérateur et du dénominateur est $4 F - (I_e + 2 I_M)$

Une condition suffisante en général de divergence de cette intégrale est

$$I_e + 2 I_p \leq 4 F$$

(On ne pourrait avoir convergence dans ce cas que par une suppression particulière de tel ou tel diagramme). Elle signifie simplement que le degré du numérateur est égal ou supérieur à celui du dénominateur. Ceci s'écrit encore

$$4m + 4n \leq 3I_e + 2I_{\gamma} + 4.$$

On peut exprimer ce résultat en fonction uniquement des lignes externes par des relations géométriques entre les sommets et les lignes internes.

Chaque sommet $\bar{\Psi} A \Psi$ a 2 lignes électroniques, 1 ligne photonique;

chaque sommet $\bar{\Psi} A^e \Psi$ a 2 lignes électroniques, mais A^e y agit.

En comptant le nombre total de lignes d'électrons, on a $2(m+n) = 2I_e + O_e$,

le nombre total de lignes de photons, $n = 2I_{\gamma} + O_{\gamma}$,

le nombre d'opérateurs A^e $O_v = m$.

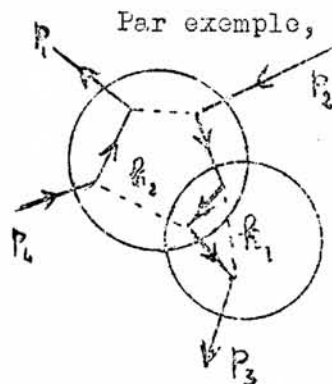
En remplaçant I_e et I_{γ} par leur valeur tirée de ces expressions, et en reportant dans la relation $4(m+n) \leq 3I_e + 2I_{\gamma} + 4$, on obtient :

$$\frac{3}{2}O_e + O_{\gamma} + O_v \leq 4. \text{ (Il convient de remarquer que } O_e \text{ est toujours pair.)}$$

Donc la divergence totale est contrôlée par le nombre de lignes externes seulement, et non par le nombre de lignes internes, donc la théorie est renormalisable.

Remarque.

Ces résultats sont valables pour la divergence totale par rapport à l'ensemble des variables, mais l'analyse générale reste complexe.



la ligne commune aux deux cercles appartient à l'intégration sur k_1 et sur k_2 . Pour l'intégrale totale,

$$\left. \begin{array}{l} O_e = 4 \\ O_{\gamma} + O_v = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 6, \text{ l'intégrale est convergente.}$$

Intégration sur k_1 seule dans le sous-diagramme correspondant,

$$O_e = 2 \quad O_{\pi} = 1 \rightarrow 4 \quad \text{intégrale divergente.}$$

Intégration sur k_2 seul

$$O_{\pi} = 2 \quad O_e = 4 \rightarrow 7 \quad \text{intégrale convergente.}$$

La condition de convergence est en fait que

$$\frac{3}{2} O_e + O_{\pi} + O_v \geq 5 \quad \text{pour tout sous-diagramme.}$$

Rappelons que cette condition signifie que le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur.

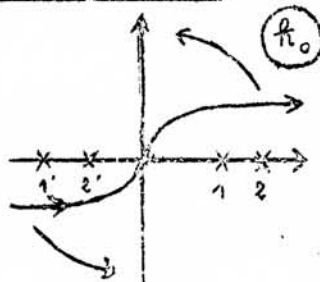
Nous allons maintenant démontrer que pour notre problème spécial, ceci donnera la convergence ; en effet notre intégrale I a les propriétés suivantes :

$$1. \quad I = \int \frac{G(k)}{F(k)} \, d_4 k \quad F \text{ et } G \text{ étant des polynomes;}$$

2. la différence de degré entre $F(k)$ et $G(k)$ étant au moins égale à 1, $F(k)$ est un produit de facteurs $(k-p)^2$ provenant d'une ligne de photon et de facteurs $(k-p')^2 + m^2$ (ligne d'électron).

3. L'intégrale est prise au sens de Feynman sur les pôles.

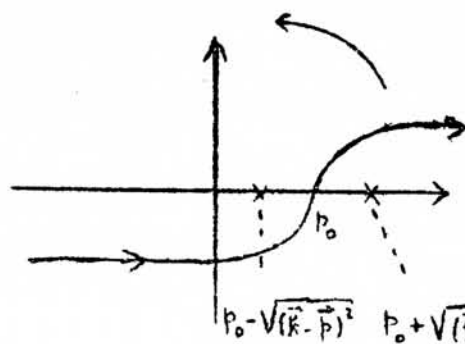
Démonstration: On commence par l'intégration sur la composante k_0 du quad-



rivecteur. Les pôles sont alors sur l'axe réel. Considérons d'abord le cas où toutes les paires de pôles conjuguées sont de part et d'autre de l'origine. L'intégrale de Feynman est alors suivant le contour indiqué, et l'intégrale se ramène immédiatement à une intégration sur

l'axe imaginaire où il n'y a pas de pôles; la condition sur la différence des degrés de G et de F assure la convergence.

Si certains pôles sont tous deux du côté de l'origine (pôles déplacés) ceci impose pour le vecteur k l'inégalité $(\vec{k} - \vec{p})^2 \leq p_0^2$, ce qui limite



le domaine de l'intégration du trivecteur $\vec{k}$.

L'intégration sur les résidus qui apparaissent lors de la rotation du contour de Feynman donne alors une contribution finie.

Ecrivons alors les types possibles de diagrammes divergents en donnant à O_e , O_π et O_v les valeurs compatibles avec la relation

$$\frac{3}{2} O_e + O_\pi + O_v \leq 4$$

O_e	$O_\pi + O_v$	$\frac{3}{2} O_e + O_\pi + O_v$	divergence
2	0	3	linéaire
2	1	6	logarithmique
0	0	0	quartique
0	0	1	cubique
0	2	2	quadratique
0	3	3	linéaire
0	4	4	logarithmique

La divergence est nulle d'après le théorème de Furry (voir plus loin) ainsi que par l'application du théorème de Furry et de la conservation du moment.

Etudions l'énergie propre du vide etc. (G_1)



Ce diagramme intervient dans un diagramme total comme une partie séparée du reste, et par conséquent il n'y a

pas de variables d'intégration commune à cette partie du diagramme et au reste du diagramme (G), donc

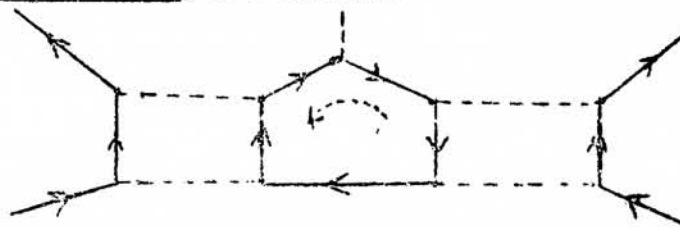
$$M_{G+G_1} = M_G \cdot M_{G_1}$$

 G_1 ainsi $\sum M = \left(\sum_G M \text{ connexe} \right) \left(\sum M_{G_1} \right) = A \left(\sum M_G \text{ connexe} \right)$

A est une constante qui représente l'énergie du vide. L'état physique du vide à l'énergie E_0 , qui serait libérée si l'interaction des champs cessait : $A = e^{iE_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt}$ est un facteur de phase constant qui provient du changement d'échelle d'énergie, mais ceci n'a pas d'effet observable. On aurait pu l'éliminer en introduisant un 10ème terme dans L_I .

Théorème de Furry.

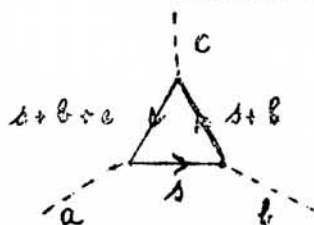
Pour toute partie du diagramme qui n'est reliée au reste que par des lignes photoniques, par exemple



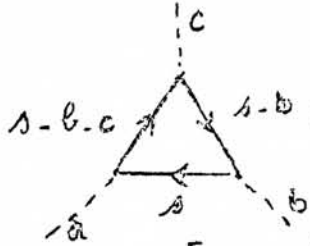
il y a deux orientations possibles pour la ligne électronique fermée; si M et M' désignent leurs contributions partielles, l le nombre de lignes photoniques, on a :

$$M' = (-1)^l M.$$

Prenons le cas simple



$$M = \dots \int ds \text{ Tr} \left[\frac{1}{\not{s} - i\mu} \gamma_a \frac{1}{\not{s} + \not{b} - i\mu} \gamma_c \frac{1}{\not{s} + \not{b} - i\mu} \gamma_b \right]$$



$$M' = \dots \int ds \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{s-i\mu} \gamma_b \frac{1}{s-b-i\mu} \gamma_c \frac{1}{s-b-c-i\mu} \gamma_a \right]$$

Mais $\operatorname{Tr} [A B C D] = \operatorname{Tr} [D^{\operatorname{tr}} C^{\operatorname{tr}} B^{\operatorname{tr}} A^{\operatorname{tr}}] = \operatorname{tr} [D^X C^X B^X A^X]$

D'autre part $\gamma_\mu^X = \pm \gamma_\mu$.

Comme $\operatorname{Tr} [\gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l] = 0$, à moins que tous les indices soient les mêmes, ou égaux 2 à 2,

$\operatorname{Tr} [A B C D] = \operatorname{Tr} [D C B A]$ pour des matrices de Dirac.

$M' = \dots \int ds \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{s-i\mu} \gamma_a \frac{1}{s-b-c-i\mu} \gamma_c \frac{1}{s-b-i\mu} \gamma_b \right]$
 ..(voir page 14 a)

Maintenant

$$\frac{1}{-s-b-c-i\mu} = \gamma_5 \frac{1}{s+b+c-i\mu} \gamma_5$$

d'où

$$\begin{aligned} M' &= \dots \int ds \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{s-i\mu} \gamma_b \gamma_5 \gamma_a \gamma_5 \frac{1}{s+b+c-i\mu} \gamma_c \gamma_5 \gamma_c \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{s+b-i\mu} \gamma_5 \gamma_b \right] \\ &= \dots \int ds \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{s-i\mu} \gamma_b \gamma_a \gamma_5 \frac{1}{s+b+c-i\mu} \gamma_5 \gamma_c \gamma_5 \frac{1}{s+b-i\mu} \gamma_5 \gamma_b \gamma_5 \right] \\ &= \dots (-1)^3 \int ds \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{s-i\mu} \gamma_a \frac{1}{s+b+c-i\mu} \gamma_c \frac{1}{s+b-i\mu} \gamma_b \right] \end{aligned}$$

car $\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_5 = -\gamma_\alpha$.

Le fait essentiel dans la démonstration est que l'interaction à un sommet anticommute avec γ_5 .

Ainsi si l est impair : $M = -M'$.

On ne doit donc pas considérer les diagrammes avec un nombre impair de lignes photoniques.

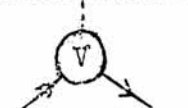
(Erratum page 14)

Ceci ne diffère plus de M que par le signe de b, c, aux dénominateurs.

Mais s étant une variable d'intégration

$$M' = \dots \int ds \left[\frac{1}{-s - i\mu} \gamma_a \frac{1}{-s - p - p - i\mu} \gamma_c \frac{1}{-s - p - i\mu} \gamma_b \right]$$

Le théorème de Furry nous laisse pour seuls diagrammes divergents les 4 types suivants :

	O_p	O_e	degré total de la divergence	
A. Energie propre du photon	2	0		quadratique
B. Diffusion de la lumière par la lumière	4	0		logarithmique
C. Vertex part	1	2		logarithmique
D. Energie propre de l'électron	0	2		linéaire

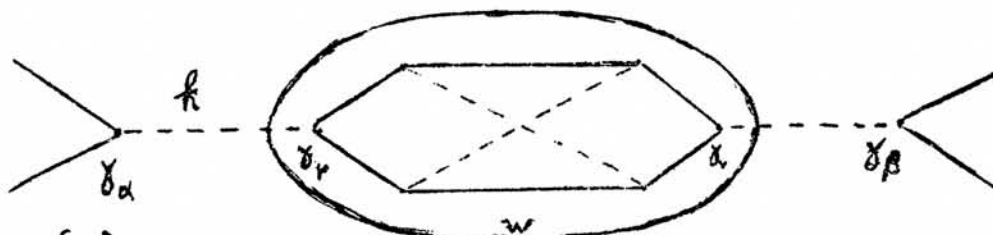
Ainsi, il est maintenant facile de caractériser, par simple inspection de la manière dont elle se rattache au reste du diagramme, le degré de divergence d'une partie intérieure, ou celle du diagramme total, en dénombrant le nombre de ses lignes externes. Nous allons faire usage systématiquement de ces propriétés dans ce qui suit.

Il faut maintenant définir le procédé permettant d'obtenir les parties finies correspondantes aux quatre types de divergence A, B, C, D. C'est ce que nous allons examiner. Nos arguments seront essentiellement basés sur la nature tensorielle des quantités étudiées et sur le degré de la divergence. Nous supposerons toujours que nous étudions des diagrammes dont on a su éliminer les divergences correspondantes à des parties entièrement contenues à leur intérieur. Nous supposerons que ces soustractions ont déjà été effectuées.

A. ENERGIE PROPRE DU PHOTON

Exemple de diagramme.

L'opérateur d'interaction qui agit à chaque sommet étant $\psi \not{A} \psi$,



Soit $\{s\}$ l'ensemble des variables internes associées aux intégrations de W .

Le forme de l'élément de matrice M est la suivante :

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{facteurs externes à } W, \text{ pouvant} \\ \text{comprendre par exemple l'inté-} \\ \text{gration sur la variable de mo-} \\ \text{ment } k \int dk \dots \end{array} \right\}_{\alpha\beta} \frac{\delta_{\mu\alpha}}{k^2} \frac{\delta_{\nu\beta}}{k^2} (M_W)_{\mu\nu}$$

M_W est ainsi un tenseur dont il est facile de prévoir la forme

$$M_W = \left\{ \iiint \dots \left(ds \not{\delta} \frac{1}{\not{s} + \not{p} - i \not{\mu}} \not{\delta} \right) \right\} \not{\delta}_\mu \not{\delta}_\nu$$

$$(M_W)_{\mu\nu} = \int ds W_{\mu\nu}(s, k)$$

Si W a n sommets, il y a : n lignes électroniques internes ($2 I_e = 2 n$)

puisque $O_e = 0$,

$$\frac{n-2}{2} \text{ lignes photoniques internes}$$

$$(2 I_p = n-2, \text{ puisque } O_p = 2).$$

Il y a ainsi $\frac{n}{2}$ variables de moments internes indépendantes et $W_{p,v}$ a la forme d'une fraction rationnelle dont le numérateur est les différentielles de $n/2$ variables de moments, le dénominateur étant de degré $(n) + (n-2) = 2n-2$ à cause des facteurs de propagation $\begin{cases} \frac{1}{s^2} & \text{pour les photons,} \\ \frac{1}{s-i\mu} & \text{pour les électrons.} \end{cases}$

On extrait une partie finie de l'intégrale totale qui est quadratiquement divergente en prenant le développement de Taylor de $U(s, k)$ autour de $k = 0$

$$W(s, k) = W(s, 0) + k_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial k_\alpha} W(s, k) \right]_{k=0} + \frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} W(s, k) \right]_{k=0} + \dots$$

Alors

$$\int ds \left[W(s, k) - W(s, 0) - k_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial k_\alpha} W(s, k) \right)_{k=0} - \frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} W(s, k) \right)_{k=0} \right]$$

est une intégrale convergente.

En effet, comme nous pouvons le voir par un raisonnement qui nous servira pour les autres cas, le reste du développement de Taylor est proportionnel à

$$\frac{1}{6} k_\alpha k_\beta k_\gamma \left[\frac{\partial^3}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma} U(s, k) \right]_{k=0} + \dots$$

Mais comme chaque k apparaît dans l'intégrande sous la forme $k + \bar{s}$ où $\bar{s}$ est une certaine combinaison linéaire des variables (s) , cela montre que

$$\frac{\partial^3}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma} W(s, k) \text{ a 3 puissances de } s \text{ au dénominateur de plus que } W(s, k).$$

Résumons :

1. Le degré de divergence de la s -intégration totale (sur toutes les variables s ensemble) est réduit de 3 puissances de s comme résultat de la soustraction ; cela suffit à rendre l'intégrale convergente.

2. Le degré de divergence de n'importe quelle sous-intégration sur

certaines des s-variables ne sera pas en général réduit par la soustraction, parce que ces s-variables peuvent ne pas se présenter combinés avec k dans l'intégrande. Cependant, il ne peut pas être augmenté par la soustraction. Par hypothèse, toutes ces sous-intégrations ont été rendues convergentes auparavant, elles resteront donc convergentes après la nouvelle soustraction.

On sait à priori que l'élément de matrice est un invariant relativiste, ce qui va nous permettre de préciser sa structure. A ce stade, on a

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(W) &= M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(W) + \int ds W_{\mu\nu}(s, 0) \\ &\quad + \int ds k_{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial k_{\alpha}} W_{\mu\nu}(s, 0) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int ds k_{\alpha} k_{\beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} W_{\mu\nu}(s, 0) \right] \\ &= M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(W) + A \delta_{\mu\nu} + k_{\alpha} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} k_{\alpha} k_{\beta} T_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2) \end{aligned}$$

A étant une constante.

$T_{\alpha\mu\nu} = \int ds \left[\frac{\partial}{\partial k_{\alpha}} W_{\mu\nu}(s, k) \right]_{k=0}$ est un tenseur du 3ème ordre indépendant de k , donc nu

$T_{\alpha\beta\mu\nu} = \int ds \left[\frac{\partial^2}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} W_{\mu\nu}(s, k) \right]_{k=0}$ est un tenseur du 4ème ordre, aussi indépendant de k et symétrique en α et β .

La forme générale de ce tenseur constant serait

$T_{\alpha\beta\mu\nu} = C \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + D \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + E \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} + F \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$
avec C, D, E, F, des constantes où $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ est le tenseur du 4ème ordre complètement antisymétrique. Mais la symétrie en α et β entraîne $F = 0$, $D = E$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\mu\nu} &= C \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + D (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \\ M_{\mu\nu}(W) &= M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(W) + A \delta_{\mu\nu} + C \frac{1}{2} k^2 \delta_{\mu\nu} + D k_{\mu} k_{\nu}. \end{aligned}$$

L'invariance de jauge va nous permettre de découvrir une propriété supplémentaire des coefficients.

Supposons qu'à l'une des extrémités de W agisse le pseudo-potentiel

$$\Lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} \cdot$$

$$--- \overset{\nu}{\circlearrowleft} \text{W} \text{---} \mu \Lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} \cdot$$

L'élément de matrice, d'une part, doit être nul, d'autre part, est égal à $k_{\mu} (M_W)_{\mu\nu}$.

On doit donc avoir :

$$k_{\mu} M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(w) + A k_{\nu} + \left(\frac{1}{2} C k^2\right) k_{\nu} + (D k^2) k_{\nu} = 0$$

Mais pour k au voisinage de 0, $M_{\mu\nu}^{\text{fini}}$ est certainement d'ordre k^3 au moins; on l'a, en effet, construit en soustrayant les deux premiers termes du développement de Taylor.

On a donc une identité algébrique terme à terme jusqu'au terme en k^2 .

Donc
$$\begin{cases} A = 0 \\ D = -\frac{1}{2} C. \end{cases}$$

D'autre part la forme du tenseur $M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(w)$ est

$$M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(w) = F(k^2) \delta_{\mu\nu} + G(k^2) k_{\mu} k_{\nu}.$$

On doit avoir aussi $k_{\mu} M_{\mu\nu}^{\text{fini}} = 0$, d'où l'on déduit :

$$F(k^2) = -G(k^2)$$

$$\text{Ainsi } M_{\mu\nu}^{\text{fini}}(w) = F(k^2) \left[\delta_{\mu\nu} k^2 - k_{\mu} k_{\nu} \right]$$

avec $F(0) = 0$ car $M_{\mu\nu}^{\text{fini}} = O(k^3)$ par construction.

Résumons :

$$M(w) = \left[k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu} \right] \left[\frac{1}{2} C + F(k^2) \right]$$

la fonction $F(k^2)$ étant finie et calculable : d'où notre résultat final.

$$M_{\mu\nu} = (\text{facteurs externes})_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) \times \left[\frac{1}{2} C_W + F_W(k^2) \right]$$

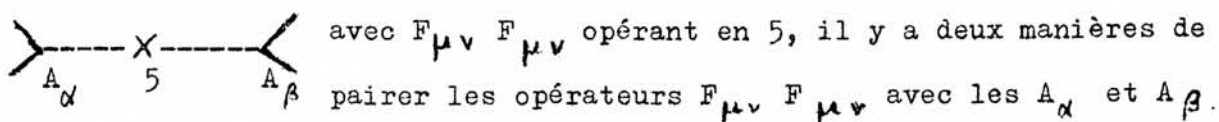
Le contre-terme pour cette partie w d'énergie propre du photon est fourni par le terme 5 du lagrangien d'interaction :

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ \delta_x \quad \quad \quad \delta_\beta \\ \lambda \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \delta_\alpha \quad \quad \quad \delta_\beta \\ \lambda \end{array} \quad - \frac{1}{4} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \frac{1}{4} C \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right] \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right]$$

Passons aux transformés de Fourier. Sa contribution est de la forme :

$$M' = (\text{même facteurs externes à } W) \frac{\delta_{\alpha\lambda}}{x_{\beta} k^2} \frac{\delta_{\beta\rho}}{k^2} \left[\delta_{\lambda\mu} k_{\nu} - \delta_{\lambda\nu} k_{\mu} \right] \\ \times \left[\delta_{\rho\mu} k_{\nu} - \delta_{\rho\nu} k_{\mu} \right] \times -\frac{1}{2} C.$$

Le facteur $-\frac{1}{2} C$ est en fait $2 \left(-\frac{1}{4} C\right)$, parce que dans le diagramme



aux deux autres sommets. D'où

$$M' = -\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_{\mu} k_{\nu} \right) \right)$$

On voit ainsi que l'on pourra éliminer C_w dans l'élément de matrice M et ne garder que la partie finie.

On comprend de même facilement le rôle des contre-termes (6) et (7). Examinons-le rapidement.

Pour (6) $-\frac{1}{2} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^e$



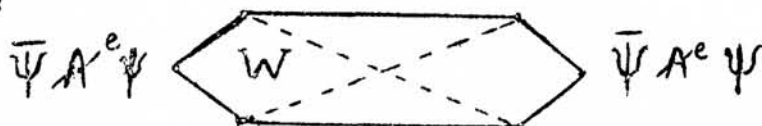
L'élément de matrice correspondant est de la forme (par un calcul analogue au précédent) :

$$M = (\text{facteurs})_{\mu} e_{\nu} \frac{1}{k^2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) \times (C_w + F_w(k^2))$$

où e_{ν} provient du champ externe.

On voit que (6) pourra éliminer la constante C_w .

Pour (7) :



La forme de l'élément de matrice est de même

$$e_{\mu} e_{\nu} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) (C_w + F_w(k^2))$$

Or, le terme (7) $-\frac{1}{4} C F_{\mu\nu}^e F_{\mu\nu}^e$ éliminera encore le terme en C_w .

Arrêtons-nous à l'interprétation physique : le terme fini $F_w(k^2)$ est ici un effet de la polarisation du vide sur le champ externe. En effet, la densité d'énergie du champ externe est

$-\frac{1}{4} (1 + F(k^2)) F_{\mu\nu}^e F_{\mu\nu}^e$ où le premier terme est la densité d'énergie dans le vide et où le second a la même force que pour un milieu diélectrique (dispersif).

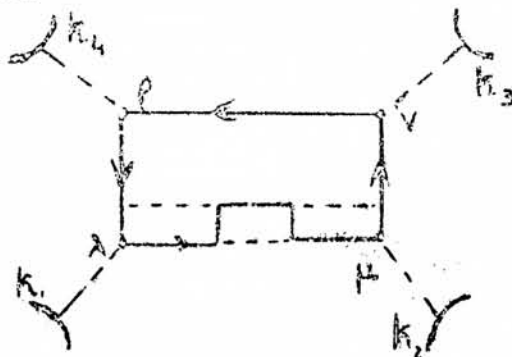
On peut appeler $1 + F(k^2)$ la constante diélectrique du vide. Les paires du champ électron - positron du vide agissent comme les atomes d'un solide et dispersent les ondes électro-magnétiques qui s'y propagent. Pour une onde lumineuse $A^e(x)$, en l'absence de charge, on a l'équation de mouvement

$$\square A^e(x) = 0, \quad \text{soit } k^2 = 0.$$

Or, on a défini $F(k^2)$ de sorte que $f(0) = 0$. Ainsi l'indice du vide pour une telle onde est égal à 1. Les effets de la polarisation du vide ne sont donc observables qu'au voisinage d'une charge où l'on n'a plus $k^2 = 0$ et donc $F(k^2) \neq 0$.

B. DIFFUSION DE LA LUMIERE PAR LA LUMIERE

Forme du diagramme :



Désignons à nouveau par $\{s\}$ l'ensemble des variables internes. On voit que l'élément de matrice est de la forme :

$$M = (\text{facteurs externes}) \times \int ds J_{\lambda\mu\nu\rho}(s, k_1 k_2 k_3 k_4).$$

Ainsi, l'on sait que

J est un tenseur du 4ème ordre;

J est au plus logarithmiquement divergent;

$$(O_p = 4, O_e = 0).$$

Pour mettre en évidence la partie finie, nous écrivons

$$\underbrace{\int (J_{\lambda\mu\nu\rho}(sk_1 k_2 k_3 k_4) - J_{\lambda\mu\nu\rho}(s, 0 0 0)) ds}_{J^{\text{fini}}} + \underbrace{\int J_{\lambda\mu\nu\rho}(s 0 0 0) ds}_{\text{tenseur du 4ème rang ne dépendant d'aucun vecteur } k}$$

On a donc la forme

$$J^{\text{fini}}_{\lambda\mu\nu\rho} + A J_{\lambda\mu} \delta_{\nu\rho} + A' \delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\rho} + A'' \delta_{\lambda\rho} \delta_{\mu\nu} + B \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}.$$

Mais la théorie est invariante pour un changement de jauge. Supposons qu'au sommet 2 par exemple agisse le pseudo-potentiel $\bigwedge \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}$.

On en déduit l'identité :

$$k_{2\nu} \left[J^F_{\lambda\mu\nu\rho} + \dots \right] \equiv 0$$

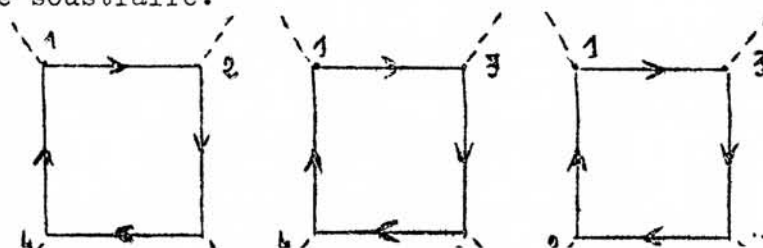
J^F est un tenseur qui est nul pour les $k_i = 0$.

On en déduit $A = A' = A'' = B = 0$.

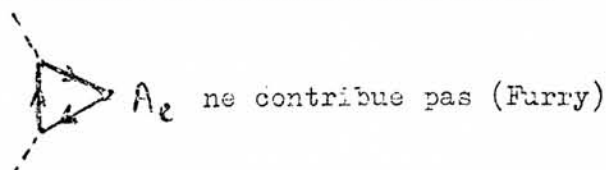
Remarque : En fait, $J_{\lambda\mu\nu\rho}$ est la somme des contributions des diagrammes G obtenus en permutant $k_1 k_2 k_3 k_4$ parmi les lignes de photon.

Cas particulier.

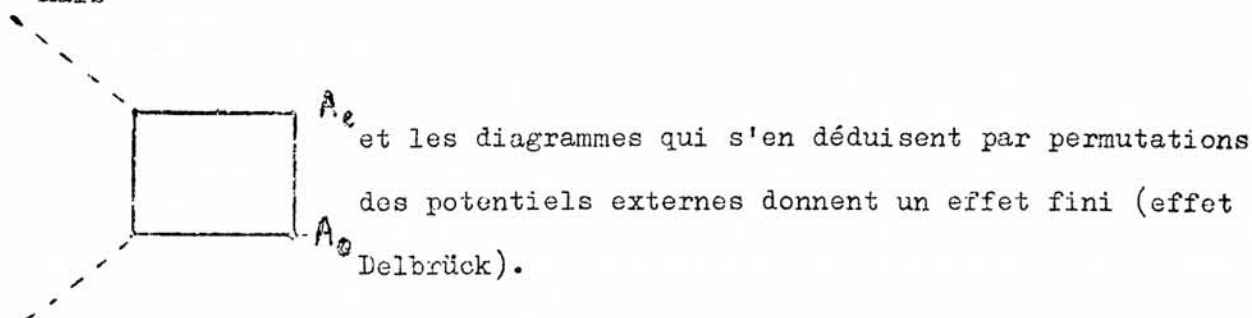
Pour la diffusion d'un photon par un photon, à l'ordre le plus bas, la somme des contributions des 3 diagrammes est finie, il n'y a pas besoin de soustraire.



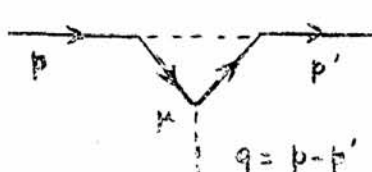
Du point de vue physique, ce qui est intéressant est l'intervention d'un potentiel externe à certains des sommets.



Mais



C. VERTEX PART



Nous désignerons par $\Lambda_{\mu}(p, p')$ l'opérateur correspondant

Forme de l'élément de matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \text{facteurs externes} \\ S_F(p) & S_F(p') \end{pmatrix} \int ds Q_{\mu}(p, p', s)$$

Comme la divergence n'est de nouveau que logarithmique,

$$\int ds [Q_{\mu}(p, p', s) - Q_{\mu}(0, 0, s)] + \int ds Q_{\mu}(0, 0, s)$$

$\int ds Q_{\mu}(0, 0, s)$ est certainement de la forme $L' \gamma_{\mu}$ puisqu'il faut que ce soit un ensemble de matrices de Dirac se transformant comme un vecteur.

Soit donc

$$\Lambda_{\mu}^{\text{fini}}(p, p') = L' \gamma_{\mu}$$

Mais on peut aussi choisir la séparation $\Lambda_{\mu}(p, p') = L \gamma_{\mu}$ avec la condition supplémentaire $\Lambda_{\mu}(p, p') = 0$ si $p = p'$ et $(\not{p} - i\mu) = 0$.

En effet

$$\Lambda'_\mu(p, p') = A(p^2) \gamma_\mu + B(p^2) (\not{p} - i\mu) \gamma_\mu.$$

On fait passer $A(p^2)$ avec $\not{p} - i\mu = 0$ dans L' :

$$L = L' + A(-m^2)$$

Ainsi, ici deux étapes :

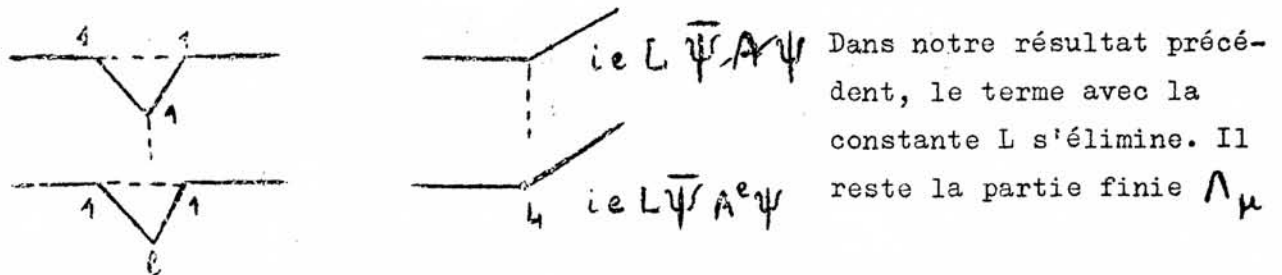
1. soustraction (sans interprétation physique du terme avec $p = p' = 0$)
2. transformation de L' .

Remarque : Ward use une méthode différente. Il soustrait

$\int ds [Q_\mu(p, p', s) - Q_\mu(p_0, p_0, s)]$ où p_0 est la valeur pour un électron libre. Mais les formes possibles d'un tel terme sont plus compliquées, car p_0 est un vecteur et l'on doit écrire $L \gamma_\mu + M p_{0\mu} + \dots$

Par contre, la signification physique du choix que nous avons fait (L, Λ) est simple : il signifie que les corrections radiatives tendent vers 0 pour les très basses fréquences.

On voit facilement comme plus haut l'action des contre-termes correspondants :



Remarque : La renormalisation du vertex est sans ambiguïté parce qu'on a pris la convention que la correction radiative doit s'annuler dans la limite où le moment et l'énergie du photon tendent vers 0.

Les résultats sont encore ici indépendants du choix des s -variables car $\int ds [Q(p, p', s) - Q(0, 0, s)]$ est une intégrale absolument convergente, et un changement de variables ne changera pas sa valeur.

Dans la théorie mésonique, la renormalisation du vertex est ambiguë parce qu'un méson ne peut pas avoir une énergie nulle, et il n'y a ainsi pas de définition "naturelle" d'une limite basse-fréquence.

D. ENERGIE PROPRE DE L'ELECTRON



Forme de l'élément de matrice :

$$M = (\text{facteurs externes}) \int R(p, s) ds.$$

R est une matrice de Dirac. La divergence de l'intégrale est linéaire.

Donc, on soustraira

$$\int \left[R(p, s) - R(0, s) - p_\mu \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} R(p, s) \right]_{p=0} \right] ds$$

$\int R(0, s) ds$ ne peut être que la matrice de Dirac identité soit $\gamma^0 I_4$.
Quant à $\int \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} R(p, s) \right]_{p=0} ds$, ce terme est de la forme $B' \gamma_\mu$.

Ainsi

$$\int R(p, s) ds = R^{\text{fini}} + \gamma^0 I_4 + B' \gamma_\mu p_\mu.$$

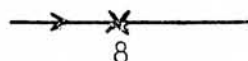
Nous allons redéfinir les constantes, de manière à ce que les effets d'énergie propre soient nuls pour un électron libre.

$$\int R(p, s) ds = \gamma + B (\not{p} - i\mu) + \sum(p) \cdot (\not{p} - i\mu)$$

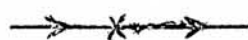
On peut de nouveau faire que $\sum(p) = 0$ pour $\not{p} - i\mu = 0$.

Le terme $\sum(p)$ est fini, et complètement défini par la condition précédente. Il est facile de voir l'action des contre-termes.

γ est éliminé par le contre-terme (8) $\gamma \bar{\psi} \psi$



$B (\not{p} - i\mu)$ est éliminé par (9) $B \bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\mu \right) \psi$.



la transformée de Fourier de l'opérateur différentiel donnant le facteur $\not{p} - i\mu$.

Il nous reste encore deux questions à traiter :

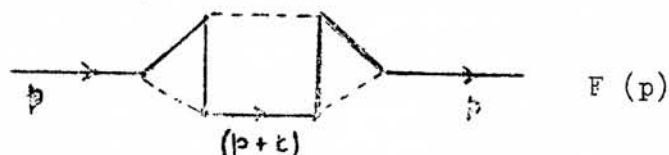
A. Vérifier l'invariance de jauge de la théorie et la consistance de la renormalisation de charge pour les particules chargées.

B. S'assurer que dans l'élimination des divergences, on peut se ramener au cas où tous les sous-diagrammes divergents sont correctement ordonnés.

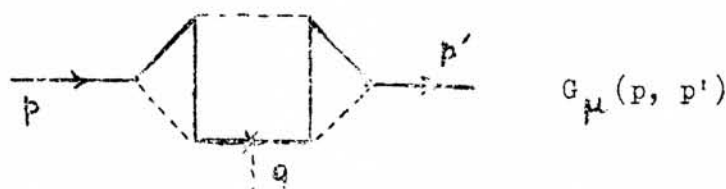
A. Nous voulons montrer que $Z_1 = Z_2$,

ou encore que $L = - B$.

Soit $F(p)$ la fonction correspondant à un diagramme du type

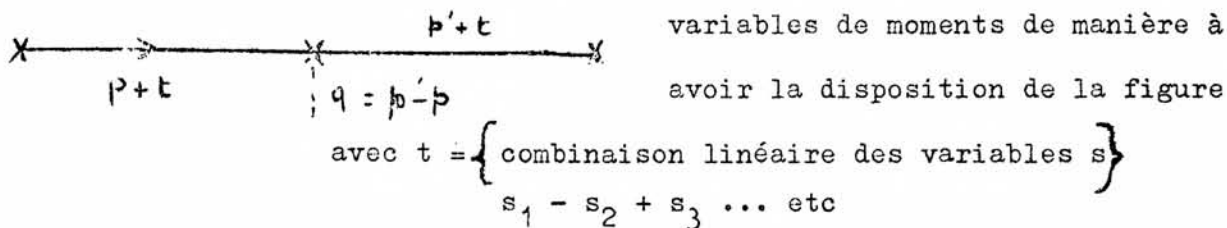


Considérons la classe correspondante de diagrammes obtenue en insérant une ligne de photons dans les lignes électroniques internes de toutes les manières possibles. Soient $G_\mu(p, p')$ les fonctions correspondantes



Il faut trouver la relation entre F et G pour pouvoir établir un rapport entre L et B .

Reprenons la ligne où l'on a inséré un photon. On peut choisir les



Alors on a les formes

$$G_{\mu}(p, p') = \int ds (F_1)_{p'} \left[\frac{1}{p' + \not{k} - i\epsilon} \gamma_{\mu} \frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} \right] (F_2)_p$$

$$F(p) = \int ds (F_1)_p \left[\frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} \right] (F_2)_p$$

Calculons $\frac{\partial F(p)}{\partial p_{\mu}}$. Ce calcul se ramène à celui de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_{\mu}} \left[\frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} [\not{p} + \not{k} + \not{\epsilon} - i\epsilon] \right. \\ &\quad \left. - (\not{p} + \not{k} - i\epsilon) \right] \frac{1}{p + \not{k} + \not{\epsilon} - i\epsilon} \\ &= - \frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} \gamma_{\mu} \frac{1}{p + \not{k} - i\epsilon} \end{aligned}$$

D'où:

$$- \frac{\partial F}{\partial p_{\mu}} = \sum G_{\mu}(p, p) \quad \text{cù } \sum \text{ porte sur toute la classe de diagrammes associés à } F.$$

Où, en sous-entendant cette sommation :

$$- \frac{\partial F}{\partial p_{\mu}} = G_{\mu}(p, p) \quad (\text{identité de Ward})$$

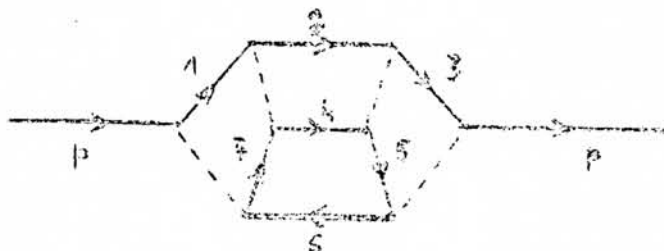
Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_{\mu}} &= B \gamma_{\mu} + \sum (p) \gamma_{\mu} + \frac{\partial \Sigma}{\partial p_{\mu}} (\not{p} - i\mu) \\ &= - \{ L' \gamma_{\mu} - \Lambda_{\mu}(p, p) \} \end{aligned}$$

$$\text{Pour un électron libre } \not{p} = i\mu \quad \begin{cases} \Lambda_{\mu}(p, p) = P \\ \Sigma(p) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad B = -L$$

Supposons un diagramme avec un cycle interne



l'argument de la page (26) s'applique quand la ligne photonique supplémentaire est insérée à une des lignes électroniques 1 2 3. Les lignes 4 5 6 7 portent des moments indépendants de p . Mais on peut ajouter p aux vecteurs moments de ces lignes sans rien changer : c'est une simple redéfinition des variables d'intégration. On est alors ramené au cas précédent.

On a montré que les divergences de $G_{\mu}(p, p)$ sont sans recouvrement et peuvent donc être isolées dans un ordre bien défini. Il reste à prouver que les différents contre-terms associés au diagramme F , quand on les modifie par addition d'une ligne photonique de manière correspondante au traitement de F , produisent les termes nécessaires pour enlever les divergences de chacun des $G_{\mu}(p, p)$. Nous ne le faisons pas. Il est aisé de s'en convaincre avec des exemples. Ainsi

$$\frac{d}{d p_{\mu}} (F + \text{contre-terms}) = \sum (G_{\mu} + \text{contre-terms})$$

où la somme de droite est finie. Donc $(F + \text{contre-terms})$ est une quantité finie et bien définie.

Nous sommes maintenant en mesure de discuter la consistance de la renormalisation de charge. Rappelons que l'on avait

$$\frac{e}{e} = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{1/2} \quad \text{et} \quad Z_3 = 1 + C$$

C étant le coefficient des contre-terms de type 5, les diagrammes correspondants ont la forme de

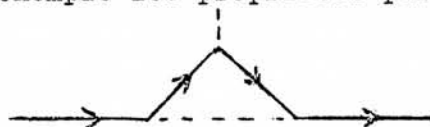


Ainsi $\frac{e}{e}$ ne dépend que de Z_3 si $Z_1 = Z_2$, et Z_3 ne dépend que des processus avec des polygones fermés.

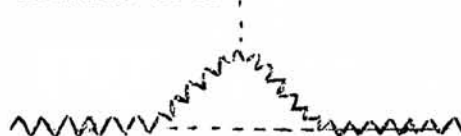
Si on a deux sortes de particules chargées, électron et méson π par exemple pour chaque champ interagissant avec le champ électromagnétique, on définira respectivement les constantes de renormalisation

$$\begin{aligned} & - Z_1 Z_2 Z_3 \\ & - Z'_1 Z'_2 Z'_3 \end{aligned}$$

Z_1 décrit par exemple les propriétés particulières d'un électron

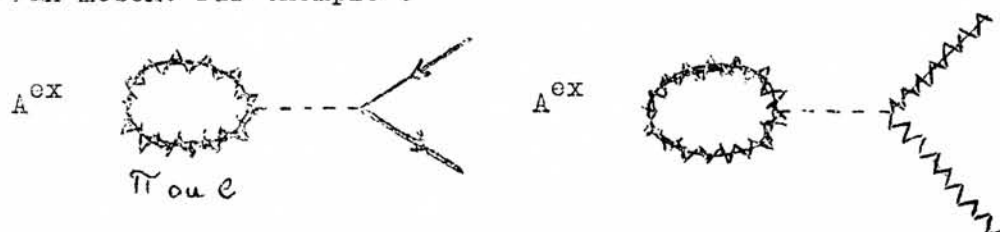


tandis que Z'_1 décrira le π



Ainsi, en général, $\begin{cases} Z_1 \neq Z'_1 \\ Z_2 \neq Z'_2 \end{cases}$

Mais Z_3 devra décrire la polarisation du vide, qu'elle soit due à un électron ou un méson. Par exemple :



donc on doit avoir $Z_3 = Z'_3$.

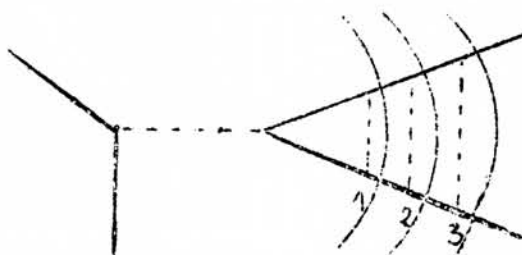
Comme $Z_1 = Z_2$

$Z'_1 = Z'_2$, cela assure la même valeur à la charge renormalisée de l'électron et du π .

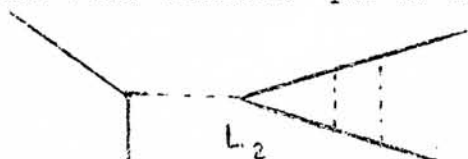
B. Nous allons maintenant examiner si l'on peut définir un procédé permettant de soustraire/les divergences infinies correspondant à certains / dans un ordre bien déterminé

sous-diagrammes d'un diagramme donné.

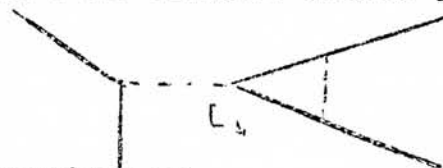
Prenons d'abord les cas simples où les divergences correspondent à des parties séparées ou entièrement contenues l'une dans l'autre. Par exemple :



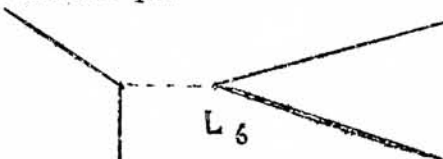
la divergence 1 est éliminée par le diagramme



la divergence 2 est éliminée ensuite par



enfin, la dernière par



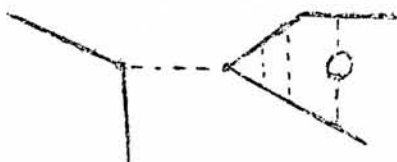
A chaque étape, les intégrales restantes sont logarithmiquement divergentes.

Ainsi, quand les parties divergentes sont contenues les unes dans les autres, on peut prendre comme règle de toujours partir de la plus petite.

Dans l'exemple traité, on utilise chaque coefficient de L successivement.

La raison du succès, c'est que dans tout processus, ce sont essentiellement les mêmes corrections radiatives qu'il faut faire, et celles-ci sont rendues finies par les contre-termes avec les constantes L , B

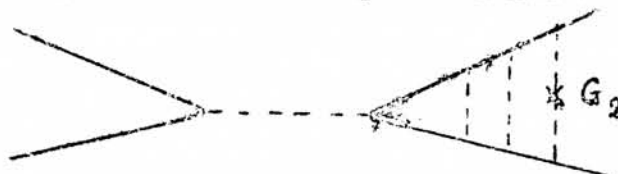
Prenons un autre exemple :



Avant d'enlever la divergence (3), il faudra enlever la partie d'énergie propre de sa ligne de photon.

Mais comme elle est entièrement contenue dans (3), donc séparée des divergences 1 et 2, cela ne crée pas de difficultés supplémentaires.

On peut d'ailleurs commencer par l'éliminer.



On voit comment se pose maintenant le problème : étant donné 2 parties divergentes, D_1 et D_2 , il faut pouvoir préciser dans quel ordre on doit les enlever.

Deux cas très simples d'abord :

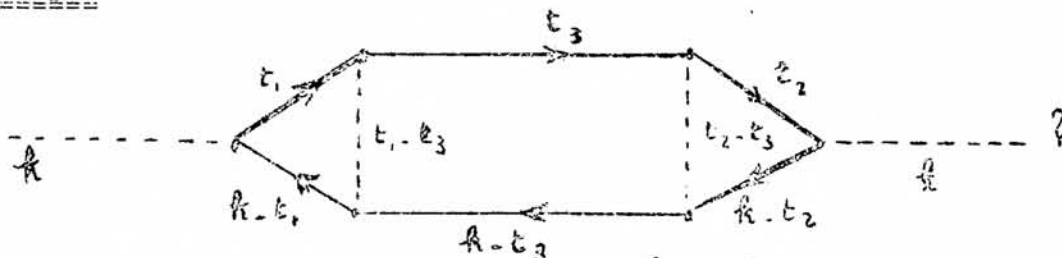
$D_1 \subset D_2$: Nous dirons que D_1 vient avant D_2 et il faut commencer par enlever la divergence associée à D_1 .

$D_1 \cap D_2 = \emptyset$: Cela se traduit analytiquement par le fait que dans l'élément de matrice, les intégrations correspondantes aux deux parties D_1 et D_2 n'ont pas de facteurs communs. L'ordre est alors sans importance.

Reste le cas exceptionnel :

$$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \quad D_1 \not\subset D_2$$

Exemple



Il y a deux divergences logarithmiques $\int \int d t_1 d t_2$

$$\int d t_1 d t_2 d t_3 \quad F(t_1) \quad G(t_1, t_2) \quad E(t_3) \quad H(t_2, t_3) \quad J(t_3, t_2) \quad K(t_2).$$

On a d'ailleurs le tableau des divergences

	$\int dt_1$	$\int dt_2$	$\int dt_3$	$\int dt_1 dt_3$	$\int dt_2 dt_3$	$\int dt_1 dt_2 dt_3$
degré du numérateur	4	4	4	8	8	12
degré du dénominateur	4	4	6	8	8	10
divergence	Log	Log	Cv	Log	Log	quadratique

Il existe deux méthodes pour traiter ce problème :

1. Salam.

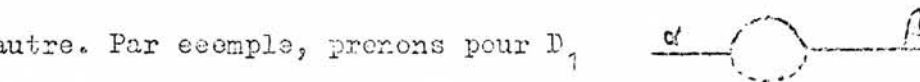
C'est la méthode directe . Elle consiste à écrire les intégrales d'ordre quelconque et à définir sur elles un processus de soustraction sans ambiguïté

2. Ward.

C'est celle que nous suivrons. Elle consiste à réduire le traitement des parties d'énergie propre à celui des vertex-parts.

Quels sont les types possibles de divergences? minutes?

a) 2 combinaisons des types de diagrammes d'énergie propre ne peuvent avoir une partie commune à moins que l'un ne soit inclus dans l'autre. Par exemple, prenons pour D_1



Si $D_1 \wedge D_2 \neq 0$, D_2 contient une des deux lignes électroniques α ou β de D_1 , il contient donc l'autre - donc contient D_1 .

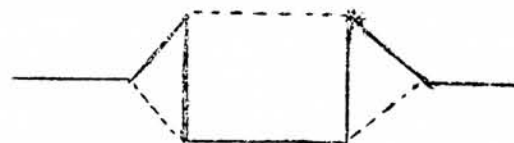
b) De même, pour les combinaisons des types (1, 3) et (2, 3). Ainsi, on a deux types seulement de diagrammes où figurent des parties divergentes ayant une partie commune, mais

qui ne sont pas contenues l'une dans l'autre; elles résultent des combinaisons (3, 3) à savoir :

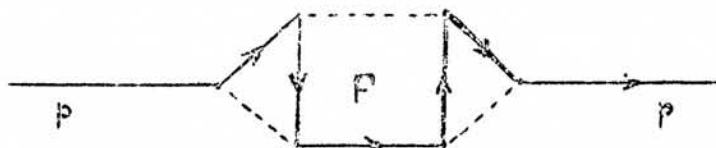


Energie propre d'un électron :

Par contre, tout vertex part ne peut contenir de divergences mixtes que par insertion de parties d'énergie propre dans ses lignes internes.



1er Cas. -



Soit $F(p)$ la fonction correspondante à ce diagramme. Nous pouvons toujours supposer que les variables internes associées à la ligne électronique ouverte sont de la forme $\not{p} + \not{p}'$. On a vu que

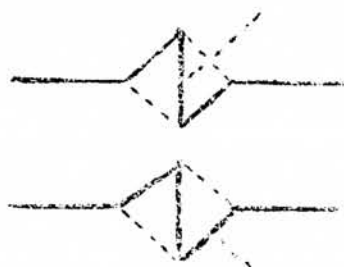
$$\frac{d}{d p_\mu} F(p) = \sum G_\mu(p, p')$$

où l'on considère l'ensemble des diagrammes construits en ajoutant une ligne supplémentaire.

Pour avoir $\frac{d}{d p_\mu} F(p)$, on prend les éléments de matrice correspondants G_μ et l'on fait la somme. Mais l'abolition d'une ligne externe dans chaque diagramme réduit la divergence, et comme elle transforme le diagramme d'énergie propre en somme de vertex parts, les divergences internes de ces derniers peuvent être traitées sans ambiguïté.



enlève la divergence gauche,



enlève la divergence de gauche et de droite,

enlève la divergence de droite .

La raison du succès de cette méthode est que l'on remplace un produit (F) par une somme de termes G en dérivant, ce qui sépare les divergences et permet d'éliminer celles qui figurent encore dans chaque terme de G où elles sont alors "correctement disposées".

On a alors $F(p)$ en intégrant

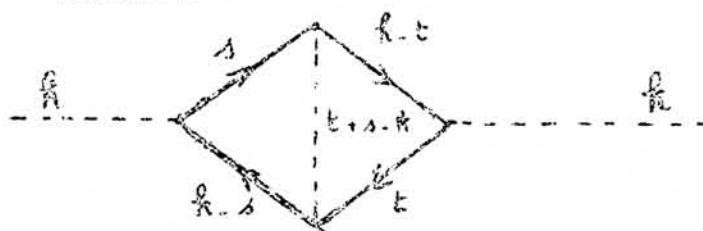
$$F(p) = \int G_{\mu} d p_{\mu} + K$$

Les conditions aux limites sont que $F(p)$ doit s'annuler au second ordre pour un électron libre. Or G_{μ} s'annule au premier ordre; il suffit alors de prendre

$$F(p) = \int_{p_0}^p G_{\mu} d p_{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 \text{ étant la valeur de } p \text{ pour un} \\ \text{électron libre.} \end{array} \right.$$

Ici $G_{\mu}(p, p)$ correspond à un processus physique mais il n'en est pas toujours de même, comme nous allons maintenant le voir pour le cas de l'énergie propre d'un photon. Le fait essentiel est ici qu'en modifiant une des lignes électroniques de l'un des vertex parts produisant la divergence mixte, nous avons supprimé la combinaison de divergences internes qui donnait cette divergence mixte.

2ème Cas. --



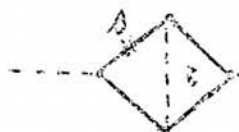
$p(k)$ contient des facteurs de type $\frac{1}{s' - i\mu}$
 $\frac{d}{d\mu}$ donne pour chacun un terme de la forme $\frac{1}{(s' - i\mu)^2}$ ce qui ajoute une
 puissance de s au dénominateur.

Calculons $\frac{d}{d\mu} p(k)$. Il faut prendre chaque ligne et additionner les contributions :

$$\frac{d}{d\mu} p(k) = \sum \frac{d}{d\mu} w_{\mu}(k)$$

$\int ds$ est convergent,

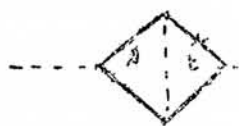
$\int dt$ est une vertex part que l'on sait traiter,



de même en changeant le rôle de s et t .

Ici les divergences partielles ne sont que logarithmiques

Il suffit de différentier une seule fois. Les $w_{\mu}(k)$,



bien que n'étant pas des vertex parts, et comme la différentiation permet d'ouvrir successivement les lignes électroniques, se comportent comme des V

pour l'analyse des divergences intérieures.

On peut ainsi calculer les $w_{\mu}(k)$, éliminer les infinités qui y figurent, et ensuite remonter aux fonctions $P(k)$ cherchées.

$$P^{fini}(k) = \int w^{fini}(k) d\mu + f(k)$$

la fonction $f(k)$ étant ici arbitraire.

Si l'on passe à la limite des grandes masses, $P^{fini}(k)$ doit tendre vers 0, car $P^{fini} = \mathcal{O}\left(\frac{P}{\mu}\right)$. Il est donc toujours correct de prendre

$$P(k)^{fini} = - \int_{\mu}^{\infty} w(k)^{fini} d\mu$$

Pour terminer, résumons nos résultats :

Z_2 renormalise le mouvement d'un électron et laisse pour les corrections



radiatives une partie finie de la forme

$(p - i\mu) F(p)$ avec pour condition de définition de $F(p)$

$$F(p) = 0 \quad \text{si } p = i\mu \quad (A)$$

de même pour Z_3



$$\rightarrow (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) G(k^2)$$

Condition de définition : $G(k^2) = 0$ si $k^2 = 0$ (B)

de même, pour Z_1



$$\rightarrow H_\mu(p, p')$$

Condition de définition : $H_\mu(p, p) = 0$ si $p = i\mu$ (C)

(A), (B), (C) déterminent sans ambiguïté les constantes de renormalisation Z_1, Z_2, Z_3 .

Soit $\psi_a(x)$... l'opérateur de champs renormalisé dans la représentation en interaction (I R) où les équations de mouvement des opérateurs de champs sont celles des champs libres.

Soit $\psi_a H(x)$ l'opérateur de champs renormalisé dans la représentation de Heisenberg : les équations de mouvement sont celles des champs interagissants.

Considérons les états à un électron.

Notation :

$|p a\rangle$ état d'un électron non interagissant avec le champ de Maxwell

$|p a\rangle_t$ état d'un électron interagissant.

C'est la fonction d'onde dans la représentation en interaction

De même

$|0\rangle$ vide des champs sans interaction.

$|0\rangle_t$ vide des champs interagissant dans la représentation en interaction.

Alors $M = \langle 0 | \psi_{\alpha}^H(x) | p u \rangle$ est l'amplitude de probabilité pour la destruction d'un électron dans l'état $| p u \rangle$ et mesure en quelque sorte l'intensité de champ électron - positron pour la création d'une particule.

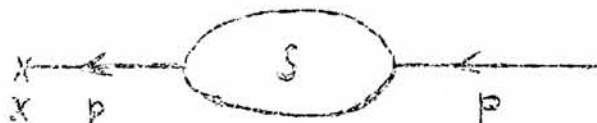
On a aussi

$$M = \langle 0 |_t \psi_{\alpha}^H(x) | p u \rangle_t \quad \text{avec } t = c x_0$$

Nous pouvons calculer M par le développement que donne la théorie des perturbations.

$$M = \sum_0^{\infty} \left(\frac{e}{i\hbar c} \right)^n \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \langle 0 | T \left(\bar{\psi}(x) \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(x_n) \right) | p u \rangle$$

les diagrammes de Feynman correspondants ont juste l'allure suivante



Or la contribution totale de tels éléments de matrice est la somme de tous les diagrammes d'énergie propre de l'électron. Chaque diagramme donne une contribution de la forme :

$$\left\{ \frac{1}{\not{p} - i\mu} F(p) (\not{p} - i\mu) \right\}$$

D'où

$$M = \sum_G \left(\frac{1}{\not{p} - i\mu} F(p) (\not{p} - i\mu) \right) e^{ipx} + M_0$$

et la limite de toute l'expression sous le signe $\sum$ pour $\not{p} = i\mu$ est 0 puisque $F(i\mu) = 0$

Reste M_0

$$D'où \quad M = \langle 0 | \psi_{\alpha}^H(x) | p u \rangle = - e^{ipx} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \frac{1}{(2\pi)^3}$$

Ainsi

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}^H(x) | p u \rangle = \langle 0_t | \psi_{\alpha}^H(x) | p u \rangle_t = c x_0 = \langle 0 | \psi_{\alpha}(x) | p u \rangle$$

Avant de renormaliser, on n'avait pas cette propriété. Par exemple,

$$\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x) | p u \rangle = \langle 0 | \psi_\alpha(x) | p u \rangle Z_2^{1/2}$$

Ainsi on peut dire que Z_2 et Z_3 sont définis de manière à ce que :

pour les champs e^+e^- (condition pour Z_2 ou B)

$$\langle 0 | \psi_\alpha^H(x) | p u \rangle = \langle 0 | \psi_\alpha(x) | p u \rangle$$

et pour les champs électromagnétique transverse (Z_3 ou C)

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^E(x) | k e \rangle &= \langle 0 | A_\mu(x) | k e \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{V \omega^2}} \epsilon_\mu e^{ikx} \quad (*) \end{aligned}$$

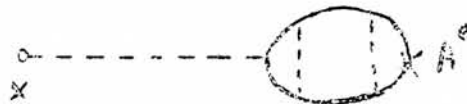
Cette dernière condition s'applique aussi à un potentiel externe. Considérons ceci plus en détail :

$\langle 0 | A_\mu^H(x) + A_\mu^e(x) | 0 \rangle$ où le premier terme est le champ induit par la polarisation du vide.

On a encore, au premier ordre en A^e , par exemple,

$$M = \sum_C (\dots) P [\bar{\psi} \not{A} \psi, \dots, \bar{\psi} \not{A}^e \psi, A_\mu(x)]$$

Le type de diagramme qui intervient ici est le suivant :



En faisant la somme de ces diagrammes on obtient

$$M = (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) F(q^2) \frac{1}{q^2} \epsilon_\mu(q)$$

Mais l'invariance de jauge élimine le terme en $q_\mu q_\nu$ de sorte qu'il vient, en repassant des moments aux variables d'espace :

$$\langle 0 | A_\mu^H + A_\mu^e | 0 \rangle = A_\mu^e(x) + F[-\square] A_\mu^e(x)$$

avec $F(-q^2)$ nul pour q égal à 0, c'est à dire sans terme constant.

Si le champ externe est presque constant, le terme en $F(-\square)$ tend

(*) Ainsi les opérateurs d'Heisenberg sont renormalisés de manière que leur valeurs coïncident avec celles des champs libres.

vers zéro.

Pour un champ constant, la polarisation du vide ne crée pas de charge, mais modifie simplement leur distribution, ce qui est physiquement satisfaisant. La charge totale est la charge des particules qui produisent le champ externe.

Pour les constantes Z_4, L , le type de diagramme à considérer est :



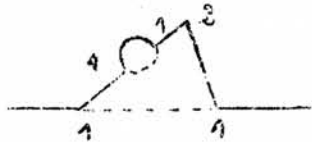
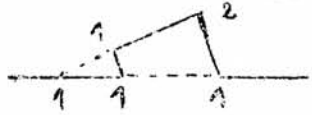
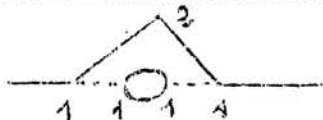
Exigeons que la charge totale pour un état à un électron ait la valeur observée (renormalisation). Soit :

$$\langle p u | j_\mu^H | p u \rangle = \langle p u | j_\mu | p u \rangle_t = -e$$

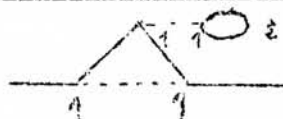
(à des facteurs constants près; en fait, on a l'expression $Q = \int j_4^H dV$)
ce qui exprime que la charge que porte un électron est la même pour un électron interagissant que pour un électron libre.

CALCUL DES DIAGRAMMES RENORMALISES A L'ORDRE $A^e (A)^4$

$$\begin{aligned}
 L_I = & \underbrace{-i e \bar{\Psi} \not{A} \Psi}_{(1)} - \underbrace{i e \bar{\Psi} \not{A}^e \Psi}_{(2)} + \underbrace{i e L \bar{\Psi} \not{A} \Psi}_{(3)} + \underbrace{i e L \bar{\Psi} \not{A}^e \Psi}_{(4)} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{4} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{(5)} - \underbrace{\frac{1}{2} C F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^e}_{(6)} - \underbrace{\frac{1}{4} C F_{\mu\nu}^e F_{\mu\nu}^e}_{(7)} \\
 & - \underbrace{\hbar e \mu \bar{\Psi} \Psi}_{(8)} - \underbrace{\hbar e B \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mu \right) \Psi}_{(9)}
 \end{aligned}$$

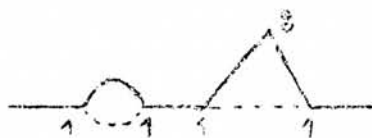
Sommets	Diagrammes	Termes
(1, 2)		$M_0 L_4 + M_4$
(1, 2)		$M_0 L_4' + M_2 L_2 + M_4^1 + (L_2)^2 M_0$
(1, 2)		$2 \left[M_0 L_4^2 + (\delta_m M_2) + B_2 M_2 + M_4^2 \right. \\ \left. + L_2 (\delta_m M_0) + L_2 B_2 M_0 \right]$
(1, 2)		$2 \left[M_0 L_4^3 + M_2 L_2 + M_4^3 + (L_2)^2 M_0 \right]$
(1, 2)		$M_0 L_4^4 + C_2 M_2 + C_2 L_2 M_0 + M_4^4$

(1, 2)



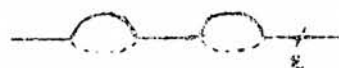
$$M_2^1 L_2 + C_2 M_2 + C_2 L_2 M_0 + M_4^5$$

(1, 2)



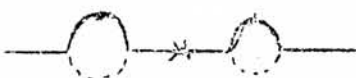
$$(\delta m + B_2) (M_0 L_2 + M_2)$$

(1, 2)



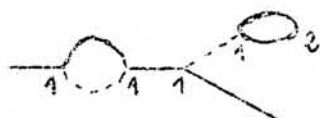
$$(\delta m + B_2)^2 M_0$$

(1, 2)



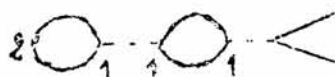
$$(\delta m + B_2)^2 M_0$$

(1, 2)



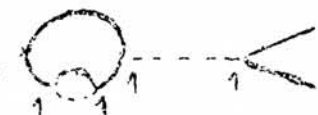
$$(\delta m + B_2) (C_2 M_0 + M_2^1)$$

(1, 2)



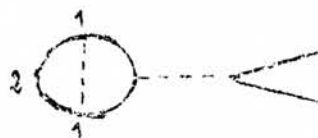
$$M_4^6 + 2 C_2 M_2^1 + (C_2)^2 M_0$$

(1, 2)



$$M_4^7 + (\delta m + B_2) (C_2 M_0 + M_2^1) + C_4 M_0$$

(1, 2)



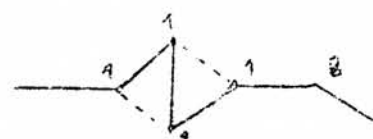
$$M_4^8 + 2 L_2 (C_2 M_0 + M_2^1) + C_4^1 M_0$$

(1, 2)

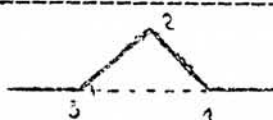


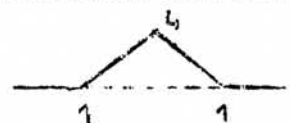
$$C_2 (\delta m + B_2) M_0 + (\delta m_4^1 + B_4^1) M_0$$

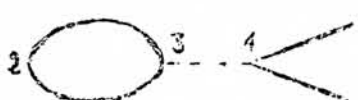
(1, 2)

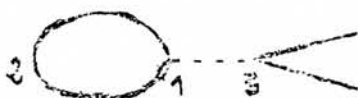


$$(\delta m_4 + B_4) M_0 + 2 L_2 (\delta m + B_2) M_0$$

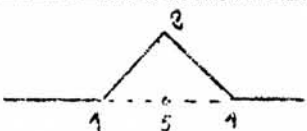
(1, 2, 3)  $- 2 L_2 (M_2 + L_2 M_0)$

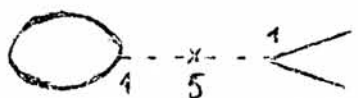
(1, 4)  $- L_2 (M_2 + L_2 M_0)$

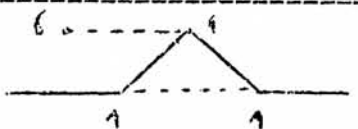
(1, 2, 3)  $- L_2 (M_2 + C_2 M_0)$

(1, 2, 3)  $- L_2 (M_2 + C_2 M_0)$

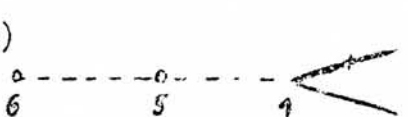
(1, 4)  $- L_2 (M_2 + C_2 M_0)$

(1, 2, 5)  $- C_2 (M_2 + L_2 M_0)$

(1, 2, 5)  $- C_2 (M_2 + C_2 M_0)$

(1, 6)  $- C_2 (M_2 + L_2 M_0)$

(6, 1)  $- C_2 (M_2 + C_2 M_0)$

(1, 6, 5)  $+ C_2^2 M_0$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} 8,9 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \quad 1 \end{array} \quad - 2 (\delta_m + B_2) (M_2 + L_2 M_0)$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \diagup \quad \diagdown \\ 8,9 \quad 1 \quad 1 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2) (M_2 + L_2 M_0)$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} 8,9 \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2) (M_2' + C_2 M_0)$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} 8,9 \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \quad 1 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2) (M_2' + C_2 M_0)$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2) (\delta_m + B_2) M_0$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2,9 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2)^2 M_0$$

$$(2, 8, 9) \quad \begin{array}{ccc} 8,9 & 2 & 8,9 \\ \times & \times & \times \\ 2,9 & 8,9 & 9 \end{array} \quad 2 (\delta_m + B_2)^2 M_0$$

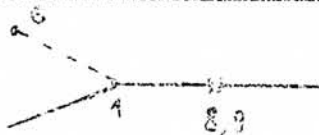
$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} 8,9 \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2)^2 M_0$$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 8,9 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad - (\delta_m + B_2)^2 M_0$$

$$(1, 2, 5) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \circlearrowleft \quad \diagdown \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad - C_2 (\delta_m + B_2) M_0$$

$$(1, 6) \quad \begin{array}{c} \delta \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \quad - C_2 (\delta_m + B_2) M_0$$

(1, 6, 8 9)



$$C_2 (\int m + B_2) M_0$$

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$



$$2 L_2 (\int m + B_2) M_0$$

(1, 1, 4)



$$L_2 (\int m + B_2) M_0$$

(8 9, 4)



$$- L_2 (\int m + B_2) M_0$$

(6, 3)



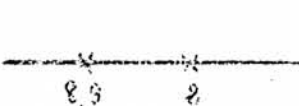
$$C_2 L_2 M_0$$

(4)



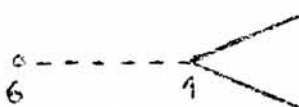
$$- (L_4 + \dots + L_4^4) M_0$$

(8 9, 2)



$$- (\int m_4 + B_4 + \int m'_4 + B'_4) M_0$$

(6, 1)



$$- (C_4 + C'_4) M_0$$

$$\underline{\text{Total}} \quad \left\{ M_4 + M_4^1 + 2 M_4^2 + 2 M_4^3 + M_4^4 + M_4^5 + M_4^6 + M_4^7 + M_4^8 \right\}$$