

On the atomization of fuel in diesel engines

V. Ya. Natanzon

CIAM

<http://www.ciam.ru/en/>

1938

issue 3, p. 3

Abstract

The atomization of fuel spray in internal combustion engines depends mainly on the dynamic effect of the air on the fuel particles and perturbations of the fuel flow in the nozzle.

The influence of the first factor was typically studied up to the present time. In this paper, we provide a method for determining the size distribution curve of fuel particles and their average size, based on the statistical methods of the kinetic theory of gases under the influence of the second factor.

Translation from Russian of the following series of papers:

V. Ya. Natanzon. “O raspylivanii topliva v dvigatelyakh dizelya [On the atomization of fuel in diesel engines]”. Dizelestroenie (3) (1938), pp. 3–10.

V. Ya. Natanzon. “O raspylivanii topliva v dvigatelyakh dizelya. Kharakter tekniya topliva v otverstii forsunki [On the atomization of fuel in diesel engines. The nature of the flow of fuel in the nozzle orifice]”. Dizelestroenie (4) (1938), pp. 6–11.

V. Ya. Natanzon. “O raspylivanii topliva v dvigatelyakh dizelya. Stolknovenie kapel' i rost ikh razmera [On the atomization of fuel in diesel engines. The collision of the droplets and the growth of their size]”. Dizelestroenie (5) (1938), pp. 19–23.

Original journal: <https://www.worldcat.org/title/dizelestroenie/oclc/145405221>, <https://lccn.loc.gov/sv91018992>

The margin indicates the issue number, page, and column of the original text. All underlining added by the translator. Underlining aside from paper or book titles indicates phrases for which the exact translation is unclear. The original papers are included as an appendix.

Translated by Ben Trettel (ben.trettel@gmail.com) via Google Translate, Yandex Translate, and Reverso Context. Contact the translator with corrections and questions.

Last updated on 2018-09-22. Permanent ID of this document: c945a26f8ec8102cca96b4150ccff232.

Introduction

p. 3L

Atomization of liquid fuel using nozzles is of great importance for the working process of diesel engines. Studies of this phenomenon are conducted in different areas: the behavior of fuel jet at the outlet of the nozzle orifice of the injector, the range of penetration of the jet, the spread of the spray jet in space and, finally, the fineness or the degree of atomization of the fuel. The latter case has been studied in a variety of experimental works. For references, refer to the manual of Sass¹ and to the more complete work of three authors: de Juhasz, Zahn, Schweitzer².

The phenomenon of atomization of the fuel jet is as follows. Fuel flows from the typically straight circular orifice under high pressure. Almost directly after the orifice the fuel jet begins to break up, and from it separates particles of irregular shapes, which are involved in the general motion of the jet. Some time after leaving the orifice, the separated particles diverge from each other and from the jet from which they were ejected over a sufficiently large distance. Being completely isolated, each particle, due to the surface tension and internal motion, assumes the spherical shape of a droplet. In this case, the droplet participates in the average motion of the entire jet and, in addition, has its own relative velocity, through which it was separated from the jet. The whole jet turns into a fine spray, which on the outside has the form of a divergent cone with a vertex at the nozzle orifice and an axis coinciding with the axis of the orifice.

p. 3R

p. 4L

When viewing under a microscope droplets collected after they lost their speed due to the resistance of the medium, it appears that a wide variety of droplet diameters are obtained. In order to characterize the fineness of atomization, which is the result of complete break up of the jet into droplets, one usually plots the droplet diameter distribution curve proposed by Häusser and Strobl³. Such curves are obtained from Sass' experiments as shown in fig. 1. The curves are plotted as follows: the diameter of the droplet is plotted on the horizontal axis, and the fraction of the total number of droplets of the corresponding diameter (in percent) is on the vertical axis. All curves have one maximum, from which they asymmetrically descend down the x -axis. This maximum corresponds to the diameter most frequently encountered in the entire mass of droplets collected after the atomization of the jet. The larger the droplet diameter differs from the diameter in which the distribution function has a maximum, the less often such a droplet occurs in the total mass. Very small and very large droplets are rare, and therefore, as the argument approaches zero and when its ordinate⁴ increases, it rapidly tends to zero.

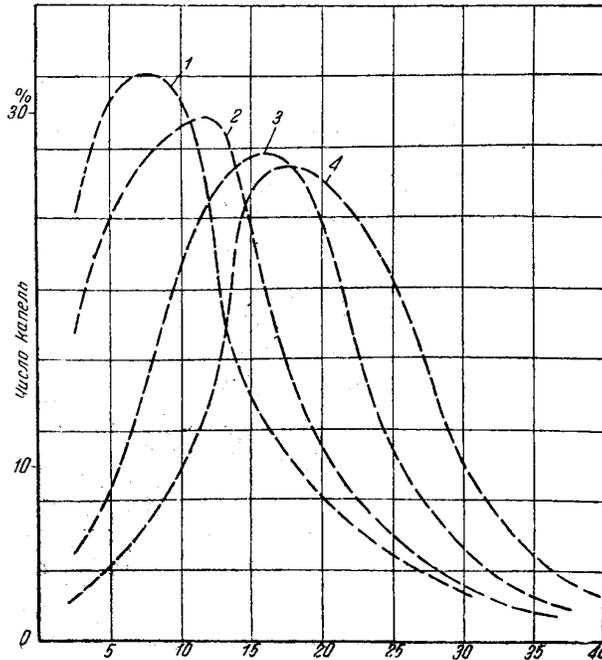
¹Sass, Compressorless Diesel Engines [Beskompressornyee dvigateli Dizelya], ONTI, 1935, p. 58. [Translator's note: This appears to be a Russian translation of F. Sass. Kompressorlose Dieselmachines [Compressorless diesel engines]. Berlin: J. Springer, 1929.]

²K. J. de Juhasz, O. F. Zahn, P. H. Schweitzer, On the Formation and Dispersion of Oil Sprays. Bulletin the Pennsylvania State College No. 40, 1932.

³F. Sass, op. cit., p. 58

⁴Translator's note: This is as written in the text. It is likely a typographical error as the first part of the sentence would suggest the distribution function goes to zero as the *argument* increases after the maximum.

The areas between the ordinate and each curve are the same, since they express the total number of droplets, always taken as 100%. Therefore, the larger the maximum ordinate, the sharper the ordinate decreases on both sides of the maximum. In addition, the larger the maximum, the closer it is, as a rule, to the origin. This circumstance expresses the fact that a finer atomization will be more uniform.



Translator's note: Число капель = *Number of droplets*. *x*-axis label was not given. It likely is microns given a similar figure from Sass was reproduced by R. A. Castleman. The Mechanism of Atomization Accompanying Solid Injection. Technical Report 440. Langley Field, VA: National Advisory Committee for Aeronautics, Langley Aeronautical Lab, 1932. URL: <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930091513>, p. 6, fig. 3.

Figure 1

The diameter of the most frequently encountered droplet is a parameter that fairly well characterizes the fineness and uniformity of atomization. But, in addition to this parameter, it is also possible to make different average values for the spray pattern, for example, the average diameter or diameter of a droplet with an average volume. p. 4R

For practical purposes, it may not be as important to know the form of the distribution curve as it is to be able to determine the value of any parameter that fully characterizes the atomization in a quantitative way. The fact that here, apparently, only one parameter is sufficient for such a characteristic, of course, favors any attempt at both experimental

and theoretical study of this phenomenon.

A brief overview of the theoretical and experimental work on atomization

There are several theoretical papers in which attempts are made to determine the diameter of a droplet. H. Triebnigg⁵ calculates the average diameter of the droplets, discarding the random deviations from the mean value. The droplet diameter is determined depending on the surface tension of the fuel and the density of air in the space where the fuel flows. The calculation is based on a perspective of the correct mechanism of the formation of each droplet at the side of the outflowing jet. The formula obtained for the radius of a droplet has the following form:

$$r = 4.6 \alpha \frac{\gamma_b}{\gamma_l} \frac{1}{\psi} \frac{1}{p},$$

where α is the surface tension; γ_b and γ_l are the specific weights of fuel and air in the space where the atomization takes place; ψ is the coefficient of air resistance to the motion of the fuel jet (the resistance is assumed to be proportional to the square of the velocity); p is the fuel overpressure in front of the nozzle head relative to the environment where the injection is made.

The formula agrees well with the experiments only for certain ranges of values of γ_l and p . For small values of γ_l , corresponding to atmospheric pressure, the formula gives completely incorrect values. The formula is generally not suitable for small γ_l , since for $\gamma_l = 0$ an infinite radius is obtained. However, atomization can occur in a vacuum, and although the droplet radius at low pressures of the air environment is somewhat larger, it nevertheless grows much more slowly than the Triebnigg formula. Figure 2 shows graphically the dependence of the droplet diameter on the density of the air, obtained on the basis of experiments of Sass⁶. These results indicate that the role of the resistance is not as significant as from the theory of Triebnigg suggests.

The role of the air environment in which the atomization occurs is evaluated differently by various authors. For example, D. W. Lee⁷ comes to the conclusion that the amount of back pressure has almost no effect on the droplet size (see the curves shown in his work shown in fig. 11). At the same time, the lowest back pressure was approximately 0.5 atm.

p. 5L

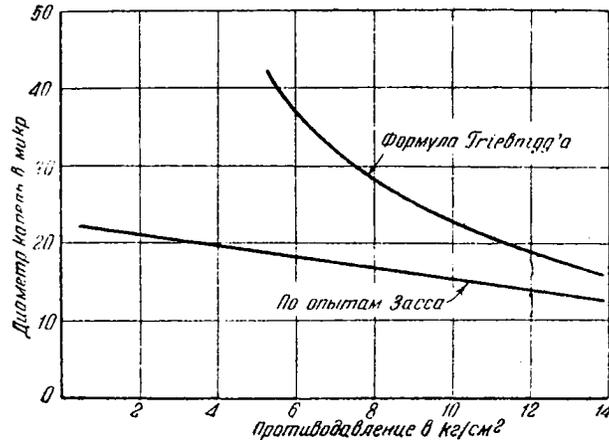
The same result was found by I. V. Astakhov⁸, the results of whose experiments found no dependence of distribution of droplet diameters on back pressure. However, they were conducted at only a relatively high back pressure of 5 to 12 atm.

⁵H. Triebnigg, Der Einblase- und Einspritzvorgang bei Dieselmotoren. Wien 1925.

⁶F. Sass, p. 59.

⁷D. W. Lee, The Effect of Nozzle Design and Operating Conditions on the Atomization and Distribution of Fuel Sprays, Nat. Adv. Com. for Aeron., Repo. No. 425.

⁸I. V. Astakhov, Vliyaniye vyazkosti topliva i drugikh faktorov na melkost' raspylivaniya [Effect of viscosity of fuel and other factors on the fineness of atomization] "Dizelestroenie" No. 2, 1937.



Translator's note:

Диаметр капель в микр = *The diameter of the droplets in microns*

Формула Трибнигга = *The formula of Triebnigg*

По опытам Засса = *According to the experiments of Sass*

Противодавление в кг/см² = *Pressure in kg/cm²*

Figure 2

On the contrary, Castleman⁹ believes that the atomization of fuel in all cases occurs only due to the disturbing effect of air on the jet, whose resistance tears the particles of fuel from the jet.

Returning to the Triebnigg formula, we note that the droplet radius is proportional to: $\frac{\alpha}{p}$.

This seems to be true if we assume that the energy of surface tension and the kinetic energy of the outflowing jet play the main role in the phenomenon of droplet formation. This dependence follows simply from considerations of dimensionality. As for the coefficient of proportionality, the formula obviously gives an incorrect expression for it.

In addition, it should be noted that the perspective of the correct mechanism for the formation of droplets does not even approximate reality since the breakup of the jet takes place quite irregularly, with the simultaneous formation of a multitude of droplets of varying diameters that are ejected from the jet in different directions.

Another approach to the study of jet breakup is given in the work of Rayleigh¹⁰, who considered the formation of regular droplets of the same diameter from a calmly flowing

⁹R. A. Castleman, The Mechanism of Atomization Accompanying Solid Injection, Nat. Adv. Com. f. Aeron., Rep. No. 440, 1932.

¹⁰Rayleigh, The Theory of Sound, v. II, 1921, pp. 351.

cylindrical jet at a low speed. He showed that the capillary oscillations of the surface of such a jet are unstable and lead to its break up and the formation of droplets, the size of which depends on the wavelength on the surface of the jet.

A study for similar conditions of the flow of the jet, but with a viscous fluid was made by Weber¹¹.

This kind of breakup is observed experimentally at low flow rates of the jet. At high speeds, the jet itself does not emerge¹², since the liquid is atomized directly at the orifice itself. p. 5R

Thus, for low and high velocities, the phenomenon of jet breakup is different. In the first case, the droplets are formed from a cylindrical jet at a certain distance from the orifice; in the second case, the jet breaks up directly at the aperture, forming a cone filled with a liquid broken into separate components.

Between these extreme cases, apparently, there are transitions. The conditions for the transition from one type of atomization to another have not been sufficiently investigated.¹³.

Remarks on the formulation of the problem

In the present work we are interested only in the case of high pressures, which are used for the atomization of fuel in compressorless diesel engines.

An attempt is made below to construct an estimate of the average droplet diameter, bringing into this area the statistical methods of the kinetic theory of gases. At the same time, we are still limiting ourselves to the case with an absence of back pressure in the air environment, in order to somewhat simplify this first, very difficult challenge. The solution should serve as the first approximation for the case of low air densities, for which experiments were performed. The dependence shown in figure 2 shows that at low densities, corresponding to a back pressure of 1 atm, the effect of air apparently can be neglected.

We attribute the phenomenon of atomization to the turbulence of the flow of fuel in the orifice and assume that the only reason for this breakup, in the absence of back pressure, is turbulence. This opinion has been repeatedly expressed. Schweitzer¹⁴ in the above-mentioned work attributed the cause of jet breakup to the combined effect of turbulence and air resistance. The higher the speed, the greater the role of the first factor and the closer to the orifice the breakup of the jet begins. At high speeds, the breakup occurs immediately at the orifice, even if the action of the air is eliminated. back pressure in general only enhances the effect of the first factor.

Based on the above, we shall assume as a first approximation that at low back pressures the air resistance can be neglected.

¹¹C. Weber, Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, Zeitsch. f. Ang. Math. und Mech. Bd. 11, 1931.

¹²Translator's note: Presumably this refers to the intact jet core emerging from the orifice.

¹³On this see Bull. Pennsylv. Coll. No. 40.

¹⁴Schweitzer, Bull. Pennsylv. Coll. No. 40.

The derivation of the distribution function

We consider the continuous breakup of a jet into droplets at steady state. In the space where the jet flows, a certain number N of fully formed spherical droplets are produced per unit time, which are in random relative motion and, moreover, participate in the general average motion of the entire jet. The average number of droplets formed per unit time over a long period of time at steady state remains unchanged. Also, the distribution of these droplets by radius is unchanged. Our problem is to deduce, from considerations analogous to those developed in the kinetic theory of gases, the distribution function of droplets by radius.

p. 6L

To do this, along with the radius of the droplet it is necessary to consider the speed of translational and rotational motion with respect to the same coordinate axes, which move translationally with the average velocity of the jet.

Let the jet flow from a right circular cylindrical orifice and let the average velocity in the orifice be U_0 . Using this speed it is easy to obtain the fuel flow rate. When there is no resistance from the environment when the fuel is flowing, the momentum of the jet must be maintained over time. Therefore, we can assume that the average velocity of each particle of the liquid is conserved and is equal to U_0 . But, in addition, each fluid particle may be more independent of the average relative motion, the cause of which is turbulent fluctuations that occur when fluid particle is located in the cylindrical orifice of the nozzle.

Let us consider a system of droplets that are fully formed in unit time. Let us assume first that each droplet, after being formed, leads a completely independent existence for an arbitrarily long time. In other words, for the time being we will assume that each droplet ejected from the jet almost immediately takes a spherical shape with a certain radius r and receives some initial translational and rotational velocities, which then remain constant. This means that for the time being we will not take into account the possible collisions of droplets with each other, which should change the speed and the radius of affected droplets (the latter is due to the possible mergers of colliding droplets).

The mechanical state of a single droplet is mainly determined by its radius r , the momentum components p_x , p_y , and p_z for the translational motion and the angular momentum k_x , k_y , and k_z for the rotational motion.

As for the coordinates of a droplet in the space in which it moves, they do not play any role in the future, since we are not considering any collisions or force fields, and therefore the velocity of the droplet will not be related to its coordinates.

The components of the droplet momentum are taken here with respect to a coordinate system moving at a speed of U_0 . Let one of the axes of the coordinate system, for example the axis x , constantly coincide with the axis of the jet and the axis of the nozzle orifice.

For each droplet, the values of the seven quantities r , p_x , p_y , p_z , k_x , k_y , and k_z have random values and are determined by causes that we can not identify.

Following the general method of the kinetic theory of gases, let us consider the phase space of these seven variables. New in our case is the introduction of the radius of the

particle as a variable, which is our main interest. The “gas”, which is considered here, consists of particles of various sizes that do not act mechanically on each other. Their interaction applies for only the brief period of their formation, but, strictly speaking, in this period the droplet particles whose state could be described approximately by seven coordinates do not exist. p. 6R

We repeat briefly the arguments that lead to the derivation of Maxwell’s formula in the kinetic theory of gases, applied to this generalized phase space.

The mechanical state of each droplet is represented by a point in phase space. Since we do not have an external force field and as long as there are no collisions, the coordinates for representing points in phase space do not vary with time and are equal to their initial values.

Consider N such points corresponding to the number of droplets ejected from the jet per unit time. Let us denote the desired distribution function in the phase space (the phase density) via φ . This will be a function of our seven arguments, which we will look for from the condition of the maximum probability of the state of the system.

It should be noted that our case is quite different from a system of molecules, which is developed in the kinetic theory of gases. First of all, we select here an isolated system of droplets formed in unit time. However, in fact, they are in interaction with each other and with the previously formed droplets in the space where the fuel is sprayed. Further, all the droplets are not identical and the total instantaneous number of them N is also a random variable, which is unknown in advance.

The first fact requires the consideration of the coordinates of the droplet, bringing the total number of arguments of the phase density to ten. Only in this way can one account for droplet collisions and their influence on the form of the function φ . However, this is a very difficult task, since the consequences of the collisions of droplets are much more difficult to take into account than, for example, the collisions of molecules treated as elastic spheres.

Because of this we are trying to determine the form of the function φ , which corresponds to the initial state of the N droplets formed. This state is maintained for a short period of time, when the action of the collisions can not yet strongly affect the distribution function. As for the further changes in the size and number of droplets that will occur from collisions, we will attempt to estimate it at least roughly approximately, considering the motion of the formed droplets in the droplet cloud.

The number of droplets N and the distribution function are assumed to be constant in time, since we consider a steady state process. The number of droplets formed is sought in this problem; it is known in advance only that this is a constant number, characteristic of the breakup process of the jet. But we know the total volume of droplets — this quantity allows us to determine the constants entering into the function φ , which in the kinetic theory of gases are determined through the number of particles in a given volume.

The form of the function φ essentially depends on the integrals of the equations of motion of the particles under consideration. The main role here is played by the energy integral. In our case, we consider the initial state of the droplet system and its transition p. 7L

from its previous state, when it was a coherent liquid mass. This transition is considered as sudden. Both states are connected, however, by the fact that the energy of the system remains the same for them. This circumstance leads to the form of the function φ , similar to the one it has in the kinetic theory of gases. The only difference is that there is one more variable r .

We now turn to the derivation of the expression for the function φ . As in the kinetic theory of gases, the region where there can be phase points is restricted to some extent depending on the magnitude of the total energy and total volume of N droplets. We split this area of the phase space into m cells; let the volume of the cell with the number i be ω_i . Let the random distribution of the N phase points of our droplet system be determined by the numbers n_i , where n_i is the number of points in the cell ω_i . The average density of points per cell is $\varphi_i = n_i/\omega_i$.

The number of ways in which a distribution of N droplets can be realized, as is well known, is equal to

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!}, \quad (1)$$

where

$$N = \sum_{i=1}^m n_i^{15}.$$

The probability of some random distribution, characterized by the numbers n_i is proportional to the expression:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} \dots \omega_m^{n_m} {}^{16}. \quad (2)$$

Applying the usual transformation of the logarithm W using the Stirling formula, we obtain:

$$\ln W = \sum_{i=1}^m (n_i \ln \omega_i - n_i \ln n_i) = - \sum_{i=1}^m \omega_i \varphi_i \ln \varphi_i. \quad (3)$$

Next, we replace the discrete picture with an approximate continuous distribution¹⁷. The function φ will be determined in the entire phase space. Instead of a finite volume of the cell ω_i , we consider an element of the volume of the phase space

$$d\Omega = dp_x dp_y dp_z dk_x dk_y dk_z dr. \quad (4)$$

¹⁵There remains, of course, the usual assumption about the difference between the two distributions determined by the same system of numbers n_i , but with a different composition of elements in individual cells.

¹⁶Here it is assumed that the probability of an event that a particular point is in the cell ω_i does not depend on the number of this cell and is proportional to its volume.

¹⁷E. Borel, *Mécanique Statistique Classique*, Ser. "Les applic. de la théorie des probabilités", vol. II, no. III, 1925, p. 63.

The density φ_i , which depended on the cell number, now turns into a continuous function of the coordinates of the phase space. Finally, the sums (1) and (3) turn into integrals:

$$N = \int \varphi d\Omega; \quad (5)$$

$$H = -\ln W = \int \varphi \ln \varphi d\Omega, \quad (6) \quad \text{p. 7R}$$

distributed over the entire space.

The steady state is characterized by the maximum probability, that is, the maximum value of W or the minimum value of H . This raises the problem of determining the minimum of the integral (6). In this case, when finding the minimum, one must take into account condition (5) and other similar conditions.

The latter includes the condition of conservation of energy. Indeed, whatever the droplet formation process, the total energy of the N droplets will be the same as the energy of the liquid jet from which the droplets formed. We can approximately determine the energy of the jet, making various more or less probable assumptions. Consequently, we know the total energy of the system of N droplets. In this quantity we do not include the energy of translational motion with the speed U_0 , which will be the same for the droplets as before their formation from the liquid jet. The considered energy consists of the kinetic energy of the random relative motion of the droplets and the potential energy of the surface tension.

If the total energy of one droplet is denoted by ε , then the total energy of N droplets is expressed by the integral:

$$E = \int \varepsilon \varphi d\Omega, \quad (7)$$

distributed throughout the entire phase space.

Solving the variational problem of determining the minimum of the integral (6) under the conditions (5), (7)¹⁸ we get that the distribution function φ , converting the integral to a minimum, has the form:

$$\varphi = A e^{-\lambda \varepsilon}, \quad (8)$$

where A and λ are two arbitrary constants that we define by substituting the expression (8) in the integral (7), and the integral

$$Q = \int \tau \varphi d\Omega, \quad (9)$$

expressing the fact that the total volume of N droplets formed from the jet per unit time is equal to the flow rate of fuel through the cross section of the nozzle orifice. This flow rate, denoted by Q , is very easily related to the average velocity U_0 . The value of τ , included under the integral sign, is the volume of a single droplet, and therefore depends only on the radius r .

The integral (9) gives the second relation for determining the constants A and λ , which replaces relation (5).

¹⁸E. Borel, *Mec. Stat.*, p. 72.

The expression for the energy of a droplet and an element of the phase space

To use equations (7) and (9) to determine the arbitrary constants λ and A , we will construct the expression for the energy of the droplets ε .

Consider moving coordinate axes associated with the jet. Let the x axis always coincide with the axis of the jet and the nozzle orifice, but the origin moves with an average fluid velocity U_0 .

We are only interested in the kinetic energy of the random motion of the droplets (that is, their relative motion¹⁹). Therefore, we denote the projection of the droplet momentum on each axis with p_x , p_y , and p_z ; so the translational kinetic energy of the droplet relative to the moving axes can be represented as follows: p. 8L

$$\frac{1}{br^3} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

where

$$b = \frac{8\pi}{3}\rho$$

and ρ is the density of the liquid.

This expression can be taken in the form:

$$\frac{p^2}{br^3}, \tag{10}$$

where

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Since the components²⁰ of the momentum are clearly not included in the expressions for the function φ , we can convert to polar coordinates in the phase space, which will be somewhat simpler. The volume element

$$dp_x dp_y dp_z$$

we now present in this form:

$$4\pi p^2 dp, \tag{11}$$

Since the integrals (7) and (9) need to be extended to the entire phase space, integration over p must be performed in the range 0 to ∞ .

¹⁹Translator's note: The parenthetical expression is a bit confusing. I assume that Natanzon means the kinetic energy of the random velocity *relative to* the mean U_0 , i.e., $u \equiv U - U_0$ where u is the "random motion" relative to the mean, U is the instantaneous velocity in a frame of reference fixed to the nozzle, and U_0 is the previously mentioned translational velocity for the frame of reference (chosen to match the jet mean velocity).

²⁰Translator's note: This makes most sense if read as *individual components in isolation* (p_x , p_y , and p_z) are not included in the expression for φ .

Let us now turn to the rotational energy. Let k_x , k_y , and k_z be the projections of the angular momentum of the droplet, then the rotational kinetic energy about the axis passing through the center of gravity must be equal to

$$\frac{1}{2I} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

where

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho r^5.$$

Denoting by k the angular momentum, i.e., by setting

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

we find that the rotational kinetic energy is

$$\frac{k^2}{cr^5}, \tag{12}$$

where

$$c = \frac{16}{15} \pi \rho.$$

Similar to the previous element

$$dk_x dk_y dk_z$$

can be represented as

$$4\pi k^2 dk. \tag{13}$$

The integrals over k are taken from 0 to ∞ .

Generally speaking, the required total kinetic energy is not confined to these two components. To it one would have to add still the kinetic energy of the oscillation of the liquid droplets. However, this would greatly complicate our task, and we are forced to disregard this part of the kinetic energy in the future. However, the discarded kinetic energy is unlikely to be large, but its role remains unclear.

The potential energy in its main part consists of the energy of surface tension, which for one spherical droplet is expressed with Gauss's formula as follows:

$$ar^2, \tag{14}$$

where r is the radius of the droplet;

$$a = 4\pi\alpha \tag{15}$$

p. 8R

and α is the coefficient of surface tension.

The surface film creates an overpressure inside the droplet, and if we take into account the compressibility of the fuel, we will obtain some additional compression energy. This,

however, is an insignificant quantity, as can be verified by numerical calculations. Therefore, we discard the potential energy of compression. Likewise, we also discard that part of the potential energy that is obtained when the surface deviates from a spherical shape during oscillations.

Thus, in the first approximation, the total energy can be represented by the formula:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{br^3} + \frac{k^2}{cr^5} + ar^2. \quad (16)$$

At the same time, the element of the volume of the phase space in place of (4) is represented in the form:

$$d\Omega = 16\pi^2 p^2 k^2 dp dk dr. \quad (17)$$

Determination of the arbitrary constant λ

We complete the integration in formula (5). Substituting here the expressions of φ and $d\Omega$, we get that

$$N = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^5}} dk \right\} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

In terms of r , the integration extends from 0 to ∞ , since r , obviously, can not have a negative value.

The integrals in parentheses belong to a known type²¹, and we can write the expression as follows:

$$N = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3} \int_0^\infty r^{12} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

We use the formula:

$$\int_0^\infty r^n e^{-\lambda ar^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (18)$$

where $\Gamma(x)$ denotes the Gamma function. In this case, we have finally:

$$N = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}. \quad (19)$$

²¹Here and below we use the following formulas:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\xi x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \xi^{-\frac{3}{2}} ;$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\xi x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \xi^{-\frac{5}{2}}.$$

Calculating Q , we substitute the expression of the function φ , $d\Omega$ and $\tau = \frac{4\pi}{3}r^3$ into formula (9). This gives the following result:

$$Q = \frac{4\pi}{3}\pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3} \frac{1}{2} \Gamma(8)(a\lambda)^{-8}. \quad (20)$$

Finally, we turn to formula (7) and note that based on (16) the general expression of the energy E is divided into three parts:

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

The first part E_1 can be represented as follows:

p. 9L

$$E_1 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^4 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^5}} dk \right\} \frac{1}{br^3} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

Calculating the integrals in brackets, we find that

$$E_1 = \frac{3}{2}\pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^4} \int_0^\infty r^{12} e^{-\lambda ar^2} dr,$$

consequently,

$$E_1 = \frac{3}{2}\pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^4} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}.$$

A completely analogous calculation shows that

$$E_2 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^3 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^4 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^5}} dk \right\} \frac{1}{cr^5} e^{-\lambda ar^2} dr$$

and is equal to E_1 .

The third part of the energy is equal to:

$$E_3 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^5}} dk \right\} ar^2 e^{-\lambda ar^2} dr$$

or

$$E_3 = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3} a \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{15}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{15}{2}}.$$

Using the formula for the Gamma function

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (21)$$

we find that

$$E_3 = \frac{13}{2}\pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^4} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}.$$

Now it remains to add the three found expressions for E_1 , E_2 , E_3 ; this returns:

$$E = \frac{19}{2} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^4} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}. \quad (22)$$

To find λ , we form the ratio of formulas (22) to (20):

$$\frac{E}{Q} = \frac{19}{2} \frac{8}{4\pi} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}{\Gamma(8)} (a\lambda)^{\frac{3}{2}}.$$

Using formula (21), we get:

$$\chi = \frac{\Gamma(8)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Since $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, the coefficient χ must have the value:

$$\chi = 17.51.$$

Using formula (15), we can now write that

$$\frac{E}{Q} = \frac{19 \cdot 3}{2\chi} \alpha (a\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

hence

$$(a\lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1.628 \frac{\alpha Q}{E}. \quad (23)$$

We will use this formula below; it defines the required constant λ .

The distribution of the droplet radii and determination of the volume mean radius of the droplets p. 9R

We now find the distribution of the droplets along the radii and the expression for some quantities characteristic of this distribution.

If we are interested in the distribution of the droplets formed over the radii, regardless of the droplet velocities, then we must integrate the function φ with respect to all variables except r . If this is done and the result is denoted by $Nf(r)$, then we have:

$$Nf(r) = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3} r^{12} e^{-\lambda ar^2}.$$

The absolute number of droplets, whose radius is contained in the interval $(r, r + dr)$, where the translational and angular velocities are arbitrary, is:

$$N f(r) dr.$$

The corresponding relative number, i.e. the fraction of the total number of droplets whose radius is contained in the interval $(r, r + dr)$, is obtained by dividing by N , and consequently this number must be equal to:

$$f(r) dr = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} (a\lambda)^{\frac{13}{2}} r^{12} e^{-\lambda a r^2} dr. \quad (24)$$

We can go to dimensionless coordinates by introducing the variable x using the formula:

$$x = (\lambda a)^{\frac{1}{2}} r.$$

Then expression (24) takes the form:

$$f(x) dx = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} x^{12} e^{-x^2} dx. \quad (25)$$

where

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} = 0.6947 \cdot 10^{-2}.$$

If function (25) is integrated in the range from 0 to ∞ , then we obtain unity, as is easy to verify on the basis of formula (18). This is as it should be, since $f(x) dx$ is the relative number of droplets whose radius is in the interval:

$$\left[(\lambda a)^{-\frac{1}{2}} x; (\lambda a)^{-\frac{1}{2}} (x + dr) \right].$$

We now find the maximum of the function $f(x)$. From the equation

$$f'(x_0) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} (12 - 2x_0^2) x_0^{11} e^{-x_0^2} = 0$$

we find:

$$x_0 = \sqrt{6} = 2.449,$$

and from here

$$f(x_0) = 0.8026.$$

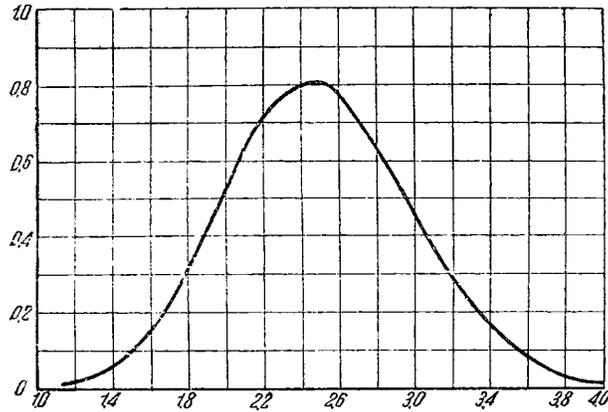


Figure 3

Fig. 3 shows the curve $y = f(x)$. This curve is almost symmetrical about the maximum ordinate and close to a normal distribution curve centered at the point $x_0 = 2.45$.

We have already pointed out that this distribution does not refer to the final composition of the droplets into which the jet breaks down and which the experimenter can collect and observe. The distribution obtained refers to the initial state, when the droplets are just ejected from the jet. If collisions do not lead to merging of droplets, the distribution (25) p. 10L would remain constant and could be observed.

However, in collisions, mergers of droplets usually occur. Therefore, the volume of droplets under random motion will increase with time. This not only increases the average droplet size, but the nature of their distribution over the radii must also vary.

We will return to this issue below.

Note that the initial distribution is characterized by the radius of the most frequently p. 10R encountered droplet. This radius can be represented on the basis of (23) as follows:

$$r_0 = (a\lambda)^{-\frac{1}{2}}x_0 = 3.987\frac{\alpha Q}{E}. \quad (26)$$

We now calculate the volume mean radius of the droplets.

Denoting it by r_1 , we find that

$$\frac{4\pi}{3}r_1^3 = \frac{Q}{N},$$

since the average volume of the droplets is obviously equal to the total volume of the liquid Q , divided by the number N of them. On the basis of formulas (19) and (20) we find that

$$r_1^3 = \chi(a\lambda)^{-\frac{3}{2}}$$

and from here²²

$$r_1 = 4.227 \frac{\alpha Q}{E}. \quad (27)$$

From here, among other things, it follows that the relationship

$$r_1 = 1.060r_0.$$

Thus, to know the most important droplet size in practice, the value of r_1 , it is necessary to determine the energy of the droplets E .

(Continued in the next issue)

The nature of the flow of fuel in the nozzle orifice

issue 4,
p. 6L

Before turning to the problem of determining the energy E , we consider the flow of fuel in the nozzle orifice.

Fig. 4 shows a section of the nozzle orifice and outflowing jet. $MNFE$ is the cross-section of the cylindrical orifice, $KNFL$ is the cone of the atomized jet. The length of the orifice L usually is several times larger than its diameter $2R_0$.

At a sufficiently high average velocity U_0 , a turbulent flow regime is established in the orifice. Since the ratio of the length of the orifice to the diameter $\frac{L}{2R_0}$ is usually not more than 2–4, the entire mass of fuel in the orifice is not occupied by a turbulent flow. Here, apparently, the same phenomena as in the initial part of a long pipe will occur²³.

The initial edge ME of the orifice is usually sharp, and the turbulent boundary layer starts from it. It is adjacent to the surface of the orifice and gradually thickens. With a sufficient length of the orifice, this layer would spread over the entire mass of the liquid, and then the same velocity profile would be established along the cross section of the jet, independent of the distance of the section from the entrance. But the length L of the orifice

²²Translator's note: To present Natanzon's mass/volume mean radius expression in easier to understand variables, it may be helpful to jump ahead in the series of papers to equation (39) for Q and equation (41) for E . Q is the volumetric flow rate, where $Q \equiv \int_A U_0 dA$. E is the total turbulent energy flow rate through the nozzle, where $E \equiv \int_A k\rho U_0 dA$, where k is the turbulent kinetic energy, $k \equiv \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$. Note that in equation (41), Natanzon ignores w fluctuations, but what is written here does not necessarily do so. For a uniform velocity profile and uniform k profile, we find that $E = k\rho Q$. So, the mass mean diameter D_{30} can be found:

$$D_{30} = 2R_{30} = 2r_1 = 2 \cdot 4.227 \frac{\sigma Q}{k\rho Q} = 8.454 \frac{\sigma}{k\rho},$$

where the more modern notation for surface tension, σ , is used instead of Natanzon's α . This is an approximation of Natanzon's result. Natanzon's result is more general as it considers the velocity and turbulence kinetic energy profiles.

²³See Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, L. Schiller, Flow in pipes [Dvizheniye zhidkosti v trubakh]. Russian translation by G. A. Vol'pert, 1936, p. 94. [Translator's note: Original title "Strömung in Röhren".]

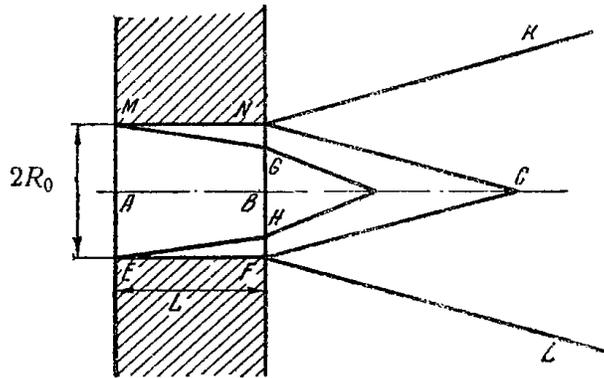


Figure 4

in the nozzles is never very large, and therefore we must assume that at the end of the orifice NF , the thickness of the boundary layer is less than the radius R_0 . The core of the jet in the orifice $MGHE$ is filled with a potential flow. We shall assume approximately that in this region the velocity is constant everywhere in the cross section and is equal to U_1 .

When the jet exits the orifice, particles are released from its surface, which turn into spherical droplets. Because of this, the non-spray core becomes thinner and erodes completely at point C . Around this part of the jet or its core, ejected droplets are in random motion. This is the likely picture of the break up of the jet²⁴.

The break up of the jet and turbulence

p. 6R

The main cause of jet breakup, apparently, is turbulent velocity fluctuations in the boundary layer, which are superimposed on the time-averaged velocities²⁵.

Suppose, for example, that the averaged axial velocity is U , and the radial velocity is zero. We denote the components of the velocity fluctuations along the axis and the tube radius through u' and v' . At any given moment, at any point in the flow, these quantities can have any positive or negative random value. It is assumed that the average values of u' and v' in time are always zero.

With the fluctuations u' and v' is associated the notion of turbulent stress or friction

²⁴See the beginning of the article (with reference to Schweitzer) in the journal "Dizelestroenie" No. 3, 1938.

²⁵T. Kármán, Some aspects of the turbulence problem. Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics in Cambridge. 1934. J. Nikuradse, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurw., Hf. 356, 1932. A Russian translation is in the collection "Problems of turbulence", ed. M. A. Velikanova and N. T. Shveykovskogo. ONTI 1936. [Translator's note: The latter is available translated into English as NASA TT F-10,359 from https://archive.org/details/nasa_techdoc_19670004508.]

introduced by Reynolds, which acts analogously to viscosity and leads to a dramatic change in the averaged motion as compared with the laminar regime²⁶. Turbulent stress far away from the boundaries of the flow greatly exceeds the viscous stress in its influence on the averaged motion. Only near the boundaries are the roles reversed: here the main component is viscous stress.

Physically, the turbulent stress is explained by the mixing of the liquid between separate layers taken parallel to the velocity of the averaged motion. From each layer, particles are continuously ejected, which, after going some way in direction of the other layer, gradually lose their initial velocity and mix with the liquid of the new layer, and consequently take the velocity of this layer. This transfer of particles from one layer to another (turbulent transfer) is the cause of the velocity fluctuations at each point of the turbulent flow.

In the above-mentioned paper, Schweitzer believes that in the case of turbulent flow of the fuel in the jet, the particles transferred between different layers can be ejected outside the jet as soon as the latter leaves the orifice, and that this is the only cause of the gradual break up of the jet in the absence of back pressure. This author believes that the experiments with jets in a turbulent flow fully confirm this view about the break up.

We adopt the assumption above about the turbulent breakup of the jet as the basis for the entire calculation.

We shall assume in the following that the fluctuation energy per unit volume of the flowing liquid of the jet is equal to the energy of the droplets in relative motion, the total volume of which is unity. This assumption allows us to calculate the constant E in equation (7).

p. 7L

The thickness of the boundary layer in the nozzle orifice

We must now determine the constant E . But first we need to study the thickness of the boundary layer.

For the case of a boundary layer adjacent to a flat plate, there is a formula from Prandtl²⁷:

$$\delta = \frac{0.37x}{\sqrt[5]{\frac{U_1 x}{\nu}}},$$

where δ is the thickness of the layer at a distance of x from the leading edge of the plate;

²⁶See the derivation of the Reynolds equations. Lamb, *Hydrodynamics*, 5th ed., 1924, p. 638, or O. Reynolds, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, in the collection titled "Probl. turbulentn." ["Problems in turbulence"], p. 203.

²⁷L. Prandtl, O. Tietjens, *Gidro- i aerodinamika* [Hydro- and aerodynamics] vol. II, 1935, p. 94. [Translator's note: This appears to be a Russian translation of O. K. G. Tietjens and L. Prandtl. *Hydro- und aeromechanik nach vorlesungen von L. Prandtl*, Wien: Springer, 1944, the first volume of which was translated into English as O. G. Tietjens and L. Prandtl. *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*. Trans. by L. Rosenhead. New York: Dover Publications, 1957.]

ν is the kinematic viscosity and U_1 is the maximum fluid velocity in the layer.

Repeating Prandtl's arguments, one can derive the formula for the case of a boundary layer on a cylindrical surface.

Fig. 5 shows the cross section of the flow in the tube near the initial section MO . The region occupied by the boundary layer is shaded. In any section there is a velocity profile, shown in fig. 5a. In part of section KD , the velocity is constant and is equal to U_1 ; inside the boundary layer the velocity U varies from U_1 to zero on the wall. In deriving the formula for the thickness of the layer δ as a function of the distance x , Prandtl assumes that in the layer, as in the tube, the velocity varies according to the "one-seventh" law, i.e.

$$U = U_1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}},$$

where y is the distance from the wall.

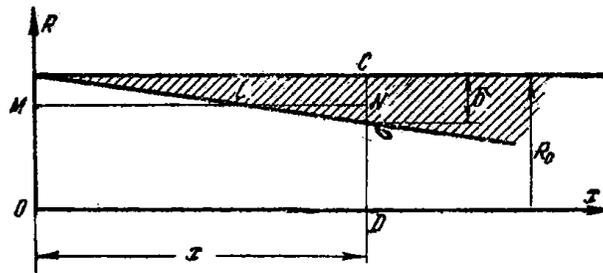


Figure 5

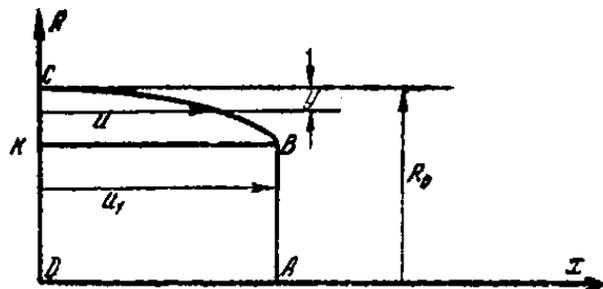


Figure 5a

The desired formula is obtained by applying the momentum theorem. A fluid particle moving parallel to the wall on the way to MN enters the boundary layer at point L . Its

velocity on the way from point L to point N decreases by $U_1 - U$. There is a loss of momentum, the cause of which is the external friction force of the layer against the wall.

We will calculate the loss of momentum in the layer on the path from the input OM to the cross section at a distance of x . We denote this loss, divided by the volume of the liquid flowing per unit time through some section of the layer CD , through J . Then this value can be represented as follows:

$$J = 2\pi\rho \int_0^\delta (U_1 - U)U(R_0 - y)dy.$$

We make a change of variables according to the formula

$$\eta = \frac{y}{\delta},$$

and substitute the expression for the velocity. After this we will have:

$$J = 2\pi\rho U_1^2 \delta^2 \int_0^1 \left(\eta^{\frac{1}{7}} - \eta^{\frac{2}{7}} \right) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta \right) d\eta. \quad \text{p. 7R}$$

Performing the integration, we find:

$$\begin{aligned} J &= 2\pi\rho U_1^2 \delta^2 \left(\frac{R_0}{\delta} \frac{7}{72} - \frac{7}{240} \right) \\ &= 2\pi\rho U_1^2 \frac{7}{72} R_0 \delta \left(1 - 0.3 \frac{\delta}{R_0} \right). \end{aligned}$$

In section $x + dx$, the thickness is incremented by $d\delta$, and the loss of momentum J is incremented by dJ . Thus, dJ is an additional loss of momentum during the movement of our fluid volume from the cross-section x to the cross section $x + dx$. On this path, a force equal to $2\pi R_0 \tau_0 dx$ acted on the layer, where τ_0 is the shear stress on the wall. Consequently,

$$dJ = 2\pi R_0 \tau_0 dx. \quad (28)$$

For τ_0 Prandtl uses the expression²⁸:

$$\tau_0 = 0.0199\rho U_1^2 \left(\frac{\nu}{U_1 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

In our case U_1 should depend on δ . Let us find this dependence.

²⁸See Prandtl, Tietjens, vol. II, p. 95. The numerical coefficient in this formula Prandtl takes as equal to 0.0228. In doing so, he takes the value of the ratio of the average layer speed and the maximum to be equal to 1.235, assuming it is constant for the entire layer. We take this ratio to be equal to 1.335, since in our case the Reynolds number is small.

We introduce the notation:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{U_0}{U_1}; \\ m_1 &= \frac{U'_0}{U_1}; \\ \Theta &= \frac{x}{R_0}; \\ Re &= \frac{U_0 R_0}{\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

where U'_0 is the average velocity over the thickness of the layer, and U_0 , as before, is the average velocity over the entire section of the orifice; Re is the Reynolds number for the orifice.

It is easy to see that this equality will be valid:

$$\pi[R_0^2 - (R_0 - \delta)^2]U'_0 + \pi(R_0 - \delta)^2U_1 = \pi R_0^2 U_0,$$

where the first term on the left is the flow through the cross-section of the layer, the second term is the flow in the central part of the flow, and on the right is the total flow taken at the average velocity. From this equation we obtain: p. 8L

$$m = m_1 \left[1 + \frac{1 - m_1}{m_1} \left(1 - \frac{\delta}{R_0} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Assuming that the velocity distribution in the layer is the same as in the section of the tube, where the region of turbulent motion has spread to the entire cross section, m_1 should generally depend on the Reynolds number, that is, ultimately again on δ . But the changes in m_1 are quite insignificant, at least for a small range of Reynolds numbers. Therefore, the number m_1 is assumed to be constant. Prandtl takes for it an average value equal to $\frac{1}{1.235} = 0.81$. Due to the fact that in our case the Reynolds numbers are small, we take for it the value equal to $\frac{1}{1.335} = 0.750$ ²⁹.

By keeping only the first power of the ratio $\frac{\delta}{R_0}$ in equation (30), we obtain:

$$m = 1 - 2(1 - m_1) \frac{\delta}{R_0}. \quad (31)$$

We now substitute into equation (28) the value $U_1 = \frac{U_0}{m}$ and its expression instead of

²⁹See Nikuradse, Laws of Turb. Motion in the collection titled "Probl. turbulentn" ["Problems in turbulence"] table 9, p. 137.

m. Tentatively differentiating the expression J , we find:

$$dJ = 2\pi\rho U_0^3 R_0 \frac{7}{72} \left\{ \left(1 - 0.6 \frac{\delta}{R_0}\right) \frac{d\delta}{m^2} - 2\delta \left(1 - 0.3 \frac{\delta}{R_0}\right) \frac{dm}{m^3} \right\}.$$

Keeping only the first powers of $\frac{\delta}{R_0}$, we get:

$$\delta^{\frac{1}{4}} \left(1 + 0.525 \frac{\delta}{R_0}\right) d\delta = 0.205 \left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$$

We integrate this equation, assuming that for $x = 0$, also $\delta = 0$; this returns:

$$\delta^{\frac{5}{4}} = \frac{0.256 \left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} x}{1 + 0.233 \frac{\delta}{R_0}}.$$

We raise both sides to the power $\frac{4}{5}$, replace x with ΘR_0 and take the expression on the right side with accuracy up to the first degree of $\frac{\delta}{R_0}$ to get:

$$\frac{\delta}{R_0} = 0.336 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}} \left(1 - 0.187 \frac{\delta}{R_0}\right).$$

or finally:

$$\frac{\delta}{R_0} = \frac{0.336 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}}}{1 + 0.063 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}}}. \quad (32)$$

Comparison of this formula with the formula for a plate shows that the difference when calculating the thickness of the layer between both formulas can reach 10%.

Formula (32) gives the thickness of the boundary layer in the initial section of a long pipe. If the pipe is short and the final section is in this area, then, of course, there is a doubt that this formula can be applied to the ends of the pipe. Apparently, this question has not yet been investigated. We assume, however, that in a section close to the outlet, the thickness can be approximately calculated from formula (32). p. 8R

Turbulent stress in the boundary layer

The magnitude of the energy of the fluctuations is closely related to the turbulent stress, so let us consider the latter in the boundary layer.

Consider any point in a turbulent fluid flow: let u' and v' be the two components of the velocity fluctuation at this point. It turns out that two random events, namely that the axial fluctuation is contained in the interval $(u', u' + du')$, and the radial in the interval $(v', v' + dv')$, will not be independent, i.e. there is a correlation between the components u' and v' . This is indicated by the fact that an average over time of the product of both components of the velocity fluctuation at any point is nonzero.

This time average value, denoted by $\overline{u'v'}$ ³⁰, is related to the turbulent stress τ introduced by Reynolds, which is expressed as:

$$\tau = \rho \overline{u'v'}.$$

Analysis of turbulent motion in a pipe has shown that the change in τ along the pipe radius can be considered, in the first approximation, linear, equal to zero at the pipe axis and maximum at the wall³¹:

The same can be assumed with some approximation for the turbulent layer, assuming that the stress is zero at the boundary of the layer and the laminar region, and reaches its maximum on the wall.

In what follows, we use the formulas for the definition of τ proposed by V. V. Voyschel³². He showed that, on the basis of Nikuradse's experiments, the quantity of interest to us in the case of a smooth circular pipe can be represented as follows:

$$\overline{u'v'} = U_0'^2 \psi \frac{\eta(1-\eta)^2}{\frac{1}{\lambda^2} + \eta(1-\eta)},$$

where U_0' is in this case, the average velocity over the thickness $\eta = \frac{y}{\delta}$; y is the distance from the wall along the radius and λ and ψ are two constants that depend on the Reynolds number for a layer

$$R_e' = \frac{U_0' \delta}{\nu} = \frac{m_1}{m} \frac{\delta}{R_0} R_e \quad (33)$$

in the following way:

$$\psi = \frac{0.072}{(\log_{10} R_e')^2}; \quad \lambda^2 = 0.11(R_e')^{\frac{8}{9}} \quad (34)$$

Since we believe that the change in stress and velocity along the layer thickness is the same as the change in these values along the radius in the pipe, then instead of the radius in all

p. 9L

³⁰The bar denotes averaging over time.

³¹See Nikuradse, Laws of Turb. Motion in the collection titled "Probl. turbulentn" ["Problems in turbulence"] p. 127.

³²V. Voyschel, Turbulentnoye treniye i raspredeleniye skorostey v pryamykh kruglykh trubakh [Turbulent stress and velocity distribution in straight circular pipes]. Zhurnal tekhnicheskoy fiziki, vol. V, issue 8, 1935, p. 1488.

formulas, we have the thickness of the layer δ , and instead of the average velocity along the pipe cross section U_0 , we have the average velocity along the layer thickness U'_0 .

In addition to these formulas, we also use the same formula for the velocity U . If χ is the ratio of the latter to U'_0 , that is,

$$U = U'_0\chi, \quad (35)$$

then $\frac{d\chi}{d\eta}$ can be represented in the form:

$$\frac{d\chi}{d\eta} = \frac{R'_e\psi}{\lambda^2} \frac{1-\eta}{\frac{1}{\lambda^2} + \eta(1-\eta)}.^{33}$$

Since λ^2 is a sufficiently large number, we can assume that $\frac{1}{\lambda^2} = 0$; this simplification for our purposes is entirely permissible and will affect the value of both considered wells only in an interval close to the wall itself. Therefore we will have:

$$-\overline{u'v'} = U'_0\psi(1-\eta); \quad (36)$$

$$\frac{d\chi}{d\eta} = \frac{R'_e\psi}{\lambda^2} \frac{1}{\eta}. \quad (37)$$

After simplification, the formula for turbulent stress gives a linear dependence on η ³⁴.

These formulas allow us to determine turbulent stress, and then the fluctuation energy, which is our goal.

For what follows, we need to know the integral of τ , which is distributed over the volume of the liquid, which flows per unit time through the output cross-section of the boundary layer. In this section, the thickness δ can be determined by formula (32) if the length and radius of the nozzle orifice is known.

Denoting the desired integral by M , we obtain:

$$M = -2\pi\rho \int_0^\delta \overline{u'v'} U (R_0 - y) dy. \quad (38)$$

Substituting the value $\overline{u'v'}$ and U and making the change of variables $\eta = \frac{y}{\delta}$, we get:

$$M = 2\pi\rho U_0^3 \delta^2 \int_0^1 (1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta \right) d\eta.$$

³³Translator's note: In the paper, this is later written as χ' .

³⁴In this form of the formulas, these essentially do not differ from the formulas of Kármán (see Nikuradse, "Probl. turbulentn" ["Problems in turbulence"] p. 197), but for us they have the advantage that the constants λ and ψ are expressed in terms of R'_e in a simple form.

We calculate separately the integral on the right-hand side. To this end, we integrate by parts:

$$\int_0^1 \chi(1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta \right) d\eta = |\chi\psi|_0^1 - \int_0^1 \chi' \psi d\eta;$$

where

$$\psi = \int_0^\eta (1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta \right) d\eta = \frac{R_0}{\delta} \eta \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) - \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{2}{3}\eta \right).$$

Note that for $\eta = 0$ (i.e., on the wall), $\chi = 0$, and for $\eta = 1$ (on the outer surface of the layer):

$$\chi = \frac{U_1}{U'_0} = \frac{1}{m_1}.$$

For the case $\eta = 0$, $\psi = 0$, and when $\eta = 1$

p. 9R

$$\psi = \frac{R_0}{\delta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta}{R_0} \right).$$

Next, we calculate the integral:

$$\int_0^1 \chi' \psi d\eta.$$

Using formula (37), we find that this integral is equal to:

$$\frac{R_0}{\delta} \frac{R'_e \psi}{\lambda^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{36} \frac{\delta}{R_0} \right).$$

Thus the desired integral is equal to:

$$\frac{R_0}{\delta} \left\{ \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta}{R_0} \right) - \frac{R'_e \psi}{\lambda^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{36} \frac{\delta}{R_0} \right) \right\}.$$

We denote the expression in parentheses by K , then for M we get:

$$M = 2\pi\rho U_0'^2 \psi R_0 \delta K.$$

We replace U_0' in this formula by U_0 and divide it by

$$Q = \pi R_0^2 U_0, \tag{39}$$

then we get:

$$\frac{M}{Q} = 2\rho U_0^2 \left(\frac{m_1}{m} \right)^3 \psi \frac{\delta}{R_0} K. \tag{40}$$

The $\frac{M}{Q}$ ratio, as we shall see, is expressed by the constant λ and the radii r_0 and r_1 [formulas (23), (26), (27)].

Let us now find the energy of fluctuations E . It is equal to:

$$E = \frac{\rho}{2} \int_0^\delta (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) U 2\pi (R_0 - y) dy. \quad (41)$$

where, like M , the energy refers to the total flow rate through the layers. This formula is similar to formula (38).³⁵

We note here that if we go from section to section of the jet inside the orifice, then E will increase. The energy of fluctuations is generated from the averaged motion: an increase in E is accompanied by a drop in pressure along the flow of the jet.

When the jet leaves the orifice, we can approximately assume that the pressure and the average velocity U_0 are no longer changing. Therefore, we can assume that the largest value of E will be in the outlet section of the orifice.

Thus, although the turbulent layer extends to the interior of the jet, this happens outside the orifice, and one can believe that the energy E will not increase due to this growth of the turbulent region. Therefore, both values of E and M will be taken at the outlet cross-section of the orifice.

We return to integral (41). Between the values $\overline{u'^2 + v'^2}$ and $\overline{u'v'}$, under some assumptions, it is possible to establish a simple relationship.

Prandtl in deriving his formula for the turbulent stress assumed that the components of the velocity u' and v' (at least in the case of motion in a pipe) are proportional³⁶, and the coefficient of proportionality does not vary with time (this means that there is a complete correlation between u' and v'). If we use this assumption, then the desired relationship is not difficult to obtain.

Denote by ϑ the ratio

$$\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{u'^2}}. \quad (42)$$

The assumption of proportionality of the components gives:

p. 10L

$$\frac{\overline{v'^2}}{-\overline{u'v'}} = \vartheta,$$

³⁵Translator's note: Equation (41) implicitly assumes that there is no turbulent energy outside of the boundary layer, which is questionable. However, this is of little consequence as E is the total turbulent energy flow rate, and making the specific turbulent energy higher in the boundary layer would ensure that E remains unmodified. That is, the equation is used to calculate E , not $\overline{u'^2}$.

³⁶Translator's note: It appears that Natanzon means *inversely* proportional, as that's the approach he takes later in this paper.

since we are dealing with average values with respect to time, and ϑ does not depend on time. Hence we obtain the required equality:

$$\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2}}{-\overline{u'v'}} = \vartheta + \frac{1}{\vartheta}. \quad (43)$$

In addition, the constant ϑ does not change along the radius of the pipe (in our case, the thickness of the layer). This follows from the law of similarity of Kármán and is well confirmed by experiments³⁷ (at least with sufficient accuracy for our purposes).

Now using the relation (43) and the formulas (38) and (41), we get:

$$2\frac{E}{M} = \vartheta + \frac{1}{\vartheta}. \quad (44)$$

Since M/Q can be determined by formula (40), we need to know the constant ϑ to determine E/Q .

The theory does not yet provide a method for determining the constant ϑ , which, apparently, should depend on the Reynolds number. We have only those data on the value of this constant, which Kármán cites in his paper at the Congress on Applied Mechanics in Cambridge³⁸. He uses the experiments of Wattendorf and Reichardt, on the basis of which we can conclude that ϑ is in the range from 0.24 to 0.32, and the Reynolds number for the second of these authors was 25 000.

Apparently no other data exists, especially at the relatively low Reynolds numbers with which we are dealing. Therefore, for the time being we will focus on the average value $\vartheta = 0.28$ and will use it for our calculations. In this case, we get a fairly close agreement with experiment in calculating the diameter of an average sized droplet. Of course, further refinement of the fineness calculations requires primarily a more reliable determination of the energy E and hence the constant ϑ .³⁹

³⁷T. Kármán, Some aspects of the turbulence problem. Collection titled "Probl. turbulentn." ["Problems in turbulence"] p. 49 [Translator's note: This was originally published in English at the International Congress for Applied Mechanics in Cambridge, 1934.] and T. Kármán, Mechanical similitude and turbulence, *ibid.*, p. 274. [Translator's note: This is available translated into English as NACA TM 611 from <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930094805>.]

³⁸Collection titled "Probl. turbulentn." ["Problems in turbulence"] p. 45.

³⁹Translator's note: Natanzon again does not explicitly write an expression in terms of the turbulent kinetic energy, instead preferring a total turbulent energy flow rate as was done for the droplet size. After collecting the terms and assuming a constant k profile (instead of Natanzon's zero k in the center) as in a previous translator's note, the following can be written:

$$k = U_0^2 \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \psi \frac{\delta}{R_0} \left\{ \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta}{R_0}\right) - \frac{R'_e \psi}{\lambda^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{36} \frac{\delta}{R_0}\right) \right\} \left(\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\right),$$

where δ/R_0 (which is a function of R_e and $\Theta = L/R_0$) can be found from equation (32), $m_1 \approx 0.750$ and is defined in set of equations (29), m can be calculated with equation (31), and ψ and λ^2 can be calculated from equation set (34), and $\vartheta = 0.28$. This equation can be abbreviated as $k = U_0^2 \cdot F(R_e, R'_e, \Theta)$.

Calculation of the volume mean radius in the initial state of atomization

We use the above formulas to obtain some numerical results. In order to be able to compare them with the experimental data of Sass, we will perform calculations for the conditions in which he performed his experiments. Fig. 1⁴⁰ shows 4 distribution curves taken at four different spraying pressures. Concerning these experiments, it is necessary to note the following: first of all, they were produced with a fairly significant back pressure (10 atm). However, as shown by the experiments of Sass himself, and especially subsequent experiments (see the works of D. W. Lee and I. V. Astakhov mentioned above), the fineness of the atomization depends little on the back pressure. Therefore, we can quite easily take these four Sass experiments for comparison with the results of the calculation, especially since our theory, based on many unconfirmed assumptions, does not, of course, give a completely accurate value of the unknown quantities, and perhaps only their order.

p. 10R

Further, we do not know, unfortunately, the values of the viscosity and the surface tension for the fuel which Sass used in his experiments. It is known that this was a gas oil with a specific gravity of 0.87. Therefore, we take only approximate values of these quantities, which can not, moreover, vary within wide limits. In general, the possible errors here can not greatly affect the results.

Finally, it must also be kept in mind that in Sass's experiments, the atomization was carried out with a conventional pump, which is used for diesel engines, and therefore the fuel flow in the nozzle holes had to be very uneven. Our formulas are derived for the steady flow of fuel. Then, the constant pressure, which is given by Sass as the pressure of spraying, apparently, is the so-called nozzle pressure. The actual pressure drop in the nozzle orifice (between the initial and final section of the orifice) may be higher than indicated for at least a significant part of the injection interval.

Despite these circumstances, we still present the results of the calculation, having in mind a comparison of the order of magnitudes.

The pressure drop in the four Sass experiments of interest to us was equal to the sequence:

$$140, 210, 270, 340 \text{ kg/cm}^2.$$

The experiments were carried out with gas oil, the density of which was:

$$\rho = 0.89 \cdot 10^{-6} \text{ kg/cm}^2/\text{cm}^4.^{41}$$

Finally, the most probable value of the flow coefficient is $\mu = 0.85$. Therefore, the average fuel velocities in the orifices should be close to the values:

$$U_0 = 1.51 \cdot 10^4; \quad 1.85 \cdot 10^4; \quad 2.18 \cdot 10^4; \quad 2.35 \cdot 10^4 \text{ cm/sec.}$$

⁴⁰"Dizelestroenie" No. 3, 1938.

⁴¹Translator's note: The units are printed as they were in the original.

Further, since the fuel, when passing through the pump, heats up rather strongly, then the resulting jet of fuel has a temperature of approximately 40° . Therefore, for the kinematic viscosity ν and the surface tension α , we can take the following values:

$$\nu = 0.075 \text{ cm}^2/\text{sec}; \quad \alpha = 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ kg/cm}^42.$$

The radius of the nozzle orifice in these experiments was $R_0 = 0.0285 \text{ cm}$, and the ratio of the orifice length to the radius was $\Theta = 8$.

Assuming these numerical values of α , R_0 , and Θ , we calculate the radius r_1 [formula (27)] for the velocities U_0 contained in the interval $1.2\text{--}2.7 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$. In this interval, the values of the rates at which the four experiments were made are contained. The results are shown in the table below.

$U_0 \cdot 10^{-4} \text{ (cm/sec)}$	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7
$r_1 \text{ (microns)}$	3.22	2.28	1.72	1.35	1.10	0.914

p. 11L

Thus, the volume mean radius r_1 of the droplets varies from 0.914 to 3.22 microns. Of course, we can not yet compare this radius with the volume mean radius of the droplets observed in the experiment, since the value obtained refers only to the initial state, i.e., to the instant of the formation of the droplets. With further motion, their dimensions should increase due to collisions and merges. We now deal with an approximate calculation of the volume mean radius in the final state.

p. 11R

(Concluded in the next issue)

The collision of the droplets and the growth of their size

issue 5,

p. 19L

We have previously indicated that when droplets move after their formation, collisions may occur and, as a consequence, the droplets will fuse. A correct account of the effect of collisions on the increase in the diameter of the droplets is a task of great complexity, so below we try only to roughly estimate the magnitude of this influence.

Let us imagine a cone-shaped space filled with an atomized jet consisting of a droplet mist (fig. 6). Let BC be the final section of the nozzle orifice. An arc of a circle BEC with center A is a section of a spherical surface. Imagine that droplets of the same initial radius r_1 are thrown out through the surface of this sphere, so that only completely formed droplets lie behind this surface inside the cone $LBECK$. All these droplets have a total velocity U_0 and a certain speed of relative random motion c .

We will imagine that the final velocity for all droplets is the same in magnitude, but can be in all possible directions, which explains the expansion of the jet as it moves. The initial value of this velocity will be assumed to be equal to the mean square droplet velocity; we

⁴²The surface tension decreases with increasing temperature. At 20° at different grades of gas oil, it ranges from 0.3 to $0.4 \cdot 10^{-4}$.

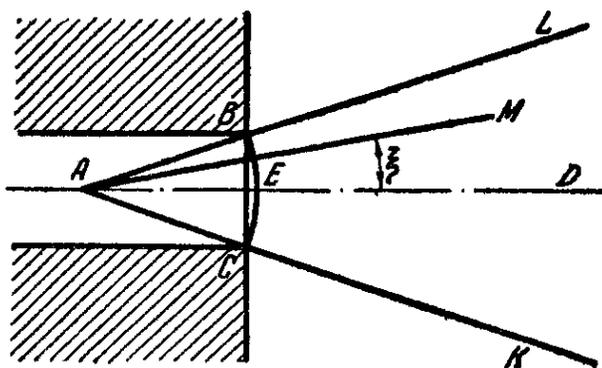


Figure 6

denote the initial velocity of relative motion by c_0 . The droplet distribution from the initial ejection velocity gives us the same formula (9), and hence it is easy to obtain the mean square value of this velocity.

As the droplets move from the spherical surface, the diameter of the average droplet at each point of the jet will grow due to collisions, after which mergers are sometimes possible. But since after each merging the velocity of the newly formed droplet is less than the velocities of the colliding droplets, then as the distance from the final cross section of the orifice increases, the velocity of the random droplet movement will decrease, and with it the number of collisions. Thus, the rate of growth of the volume of droplets should slow down, and at a large distance from the orifice we get a certain amount of droplets, which will almost be constant. The volume mean radius of the droplets in this final state will be calculated; we denote it by r_2 .

Thus, we assume that the interior of the jet cone is filled with droplets so that in the neighborhood of each point there are droplets of only one radius, which would be the average volume of the droplet at a given place of the jet. We denote this radius by r . As the motion from the surface of the sphere BEC increases, this radius increases. Consequently, it can be regarded as a function of the radius of the vector $AM = x$, by which we will determine the position of the point inside the cone.

p. 19R

We denote the radius of the sphere BEC by R'_0 , then for $x = R'_0$ we can assume that the radius $r = r_1$, and for a sufficiently large value of x , the radius $r = r_2$; it is possible to assume approximately (and for definiteness) that in this case $x = \infty$.

We shall further assume that the radius r does not depend on the polar angle ξ , that is, everywhere inside the cone at a certain distance x there are only droplets of radius r at each moment. Suppose that the velocity of the random motion of the droplets c also depends on x and varies from c_1 , at $x = R'_0$ to some value c_2 for $x = \infty$; the latter will, of course, be less than c_1 .

In addition to the quantities u and r , we consider also the droplet distribution density

over the space γ , i.e. the number of droplets per unit volume in the vicinity of each point. This quantity will also be assumed to depend only on x ; in other words, the density will be the same on any sphere of radius x inside the cone of the jet.

With increasing x , the density will decrease, first, because per unit time a certain number of droplets leave the orifice that, when moving inside the cone, will cover a larger space, and secondly, because in the process of moving mergers lead to a decrease in the number of droplets.

We first find the dependence of the density γ on the distance x . To this end, we draw two spheres with the radii x and $x + dx$ and consider the part of the layer between them located inside the cone. The number of droplets entering through the inner sphere per unit time is equal to:

$$\sigma x^2 U_0 \gamma$$

where σ is the solid angle of the cone;

U_0 is the velocity of all droplets, the relative velocity c is small in comparison with U_0 and it can be ignored; in the same way, since the cone angle is small, we can assume that U_0 is everywhere directed along the radius, although, of course, this velocity is directed for all droplets along the axis of the cone.

The number of droplets emerging from our layer through a sphere of radius $x + dx$ is equal to:

$$\sigma U_0 x^2 \gamma + \sigma U_0 \frac{d}{dx}(x^2 \gamma) dx.$$

Due to the mergers, the number of droplets inside our layer should decrease over the same period of time. This decrease in the number of droplets under consideration should be equal to the difference between the number of droplets entering our layer and the number of droplets emanating from it, that is, this loss is equal to:

p.20L

$$-\sigma U_0 d(x^2 \gamma).$$

Since in all collisions that cause droplets to merge their total volume does not change, then we can easily calculate the resulting decrease in the number of droplets in another way. We assumed that at a distance of x , all the droplets have the same radius r ; let their volume be τ . To ensure that this equality of radii is not violated due to collisions, we assume that the volume of all droplets during their stay in our layer will grow by $d\tau$. The total number of droplets entering the interior of the layer per unit time is:

$$\sigma U_0 x^2 \gamma.$$

If the volume of each of them has changed to $\tau + d\tau$, then, by virtue of the preservation of the total volume of liquid contained in the droplets, their number will decrease with respect to

$$\frac{\tau}{\tau + d\tau} \approx 1 - \frac{d\tau}{\tau}.$$

Consequently, the decrease in the number of droplets per unit time will be:

$$\sigma U_0 x^3 \gamma \frac{d\tau}{\tau}.$$

We obtained the second expression for the decrease in the number of droplets. Equating both expressions and contracting by σU_0 , we obtain the following equation:

$$-d(x^2 \gamma) = x^2 \gamma \frac{d\tau}{\tau}.$$

After integration we will have:

$$\gamma = \frac{C}{\tau x^2}, \quad (45)$$

where C is an arbitrary constant.

To determine the constant, we find the total number of droplets N that are ejected per unit time through surface BEC . On this surface $x = R'_0$, and $\tau = \tau_1$, therefore,

$$N = \sigma R'_0 U_0 \gamma_0 = \sigma R'_0{}^2 U_0 \frac{C}{\tau_1 R'_0{}^2}.$$

Hence

$$C = \frac{N \tau_1}{\sigma U_0}.$$

But since $N \tau_1 = Q = \pi R_0^2 U_0$, we get finally that

$$C = \frac{\pi}{\sigma} R_0^2. \quad (46)$$

Thus, under our simplifying assumptions, the density γ is determined.

Consider now a droplet with a radius of r_1 that just emerged from the orifice. In addition to the general velocity of U_0 , it still has a relative velocity, the initial value of which is c_1 .

Due to collisions, the droplet path will generally have a zigzag form, but since the density γ does not depend on the angle ξ , we can assume that our droplet will experience an equal number of collisions from all sides, and the path will generally deviate little from a straight line. Therefore, we neglect these deviations and assume that the path of our droplet is rectilinear.

Collisions generally depend on the relative velocity between the droplets. Our droplet has a velocity c with respect to the axes moving translationally at speed U_0 . The relative velocity of other droplets is, according to our assumption, the same magnitude, but may have an arbitrary direction. Consequently, the relative velocity between droplets can vary from 0 to $2c$. If we denote by c the average value of the relative velocity between the

droplets, then on the basis of the calculation done in the kinetic theory of gases we will have⁴³:

$$\bar{c} = \frac{4}{3}c. \quad (47)$$

The number of collisions depends on the relative velocity between the droplets. Therefore, we can assume that this number will not change for our droplet if we consider all the remaining droplets to be stationary, and update the speed to \bar{c} instead of c ; while on average per unit time our droplet will experience as many collisions as there would be if all the droplets had velocities equal to c , but randomly directed in all directions.

Thus, replacing the speed c by \bar{c} , we can assume that our droplet moves among fixed droplets distributed inside the jet cone with density γ .

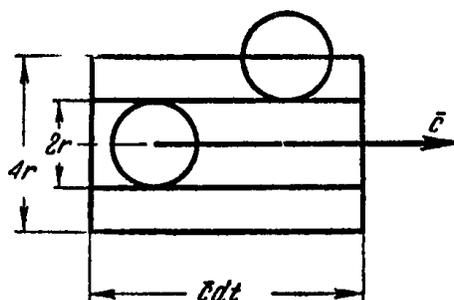


Figure 7

Moving among the fixed droplets, in time dt our droplet will cover the distance $\bar{c}dt$. If its radius is equal to r , then, therefore, during this time, it will outline a volume equal to $\pi r^2 \bar{c}dt$. On the basis of the assumption made above, in the vicinity of each point of the path of our droplet, there are other droplets of the same size, equal to the size that the droplet has already reached. Therefore, it is obvious that during this time it will collide with any other droplet, the center of which is located inside a cylinder with a radius $2r$, height $\bar{c}dt$ (fig. 7), whose axis coincides with the trajectory of our droplet. The volume of this cylinder is $4\pi r^2 \bar{c}dt$. Hence, the number of droplets, which collide with each other, is equal to

$$4\pi r^2 \bar{c} \frac{C}{\tau x^2} dt.$$

Since the absolute velocity of our droplet differs little from U_0 , we can assume that

$$dt = \frac{dx}{U_0},$$

⁴³See Prof. A. K. Timiryazev, *Kineticheskaya teoriya materii* [Kinetic Theory of Matter], GTTI, p. 136, 1933. [Translator's note: Available at the Library of Congress. See <https://1ccn.loc.gov/55027675>.]

and the expression for the number of collisions will be:

$$\frac{4\pi C\bar{c}r^2}{\tau x^2 U_0} dx. \quad (48)$$

Let us assume that each collision, even if it was only a touch, leads to the merging of droplets and the formation of a new droplet with an increased volume. Generally speaking, this is certainly wrong, since when the minimum distance between the centers is only slightly less than $2r$ and the relative velocity is large enough, a merger may not occur. However, taking into account that the relative velocity is generally small on the average, it is possible to neglect the cases when there is no merging.

However, we tried to introduce the value l of the minimal narrowing of the droplet center, at which they still merge. This value l must be somewhat less than $2r$. It is, however, determined by us from a fairly crude calculation, based on the following: the force required to break the surface film, covering both droplets as the centers were closer to each other by a distance l ; then this force was compared with the change in the amount of motion necessary to keep the droplets near each other, if the relative velocity was \bar{c} before approaching them. The value of l calculated in this way determined the radius of the cylinder in fig. 7 and, consequently, was included in expression (48) for the number of collisions. The calculations were completed, but did not lead to a noticeable change in the results. In view of this, we omit them here and assume in what follows that $l = 2r$. p. 21L

If the number of collisions in the path dx is equal to the expression (48), then the total increment of the volume of our droplet $d\tau$ on this path will be equal to the product of the volume of each droplet τ by the number of them (48), hence we have:

$$d\tau = \frac{4\pi C\bar{c}r^2}{x^2 U_0} dx. \quad (49)$$

This is the basic equation that determines the change in the volume of the droplet as it moves inside the jet cone.

The resulting equation also contains the velocity c , which must be eliminated; this can be done by considering the change in speed during a collision.

Suppose that our droplet with volume τ and mass $\rho\tau$ collided with several fixed droplets with total volume $\Delta\tau$ and mass $\rho\Delta\tau$. If the impact was inelastic, then the speed of the combined total mass \bar{c}' is related to the speed \bar{c} , which our moving droplet had before impact, with the following ratio:

$$\bar{c}' = \frac{\rho\tau}{\rho\tau + \rho\Delta\tau} \bar{c},$$

which implies that

$$\bar{c}' = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\tau}\right) \bar{c}$$

or

$$\Delta\bar{c} = -\frac{\Delta\tau}{\tau}\bar{c},$$

where $\Delta\bar{c} = \bar{c}' - c$ is the loss of speed upon impact. Taking the limit, we get:

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

Integration of this equation gives:

$$\bar{c} = \frac{C_1}{r^3}, \tag{50}$$

where C_1 is an arbitrary constant equal to

$$C_1 = \bar{c}_1 r_1^3 = \frac{4}{3} c_1 r_1^3;$$

c , and r_1 are the initial values of c and r .

We now eliminate c from equation (49), using formula (50), then we get:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{4\pi C C_1 r^2}{x^2 r^3 U_0} \tag{51}$$

or, substituting $\tau = \frac{4\pi}{3} r^3$, we arrive at the following equation:

p. 21R

$$\frac{dr}{dx} = \frac{C C_1}{U_0 r^3 x^2}. \tag{52}$$

Integration of this equation gives

$$\frac{r_2^4}{4} - \frac{r_1^4}{4} = \frac{C C_1}{U_0 R'_0}, \tag{53}$$

if you simultaneously use the conditions: when

$$x = R'_0 \quad r = r_1$$

and

$$x = \infty \quad r = r_2.$$

From formula (53), we can obtain the radius r_2 , the average volume of the droplet at a sufficient distance from the orifice, where the collisions will no longer noticeably change the volume of the droplet, since they will occur very rarely.

We now transform the expression on the right-hand side of (53). If ξ_0 is the angle between the cone surface and the cone axis, then the solid angle of the cone will be:

$$\sigma = 2\pi(1 - \cos \xi_0),$$

and between R_0 and R'_0 there will be a relation:

$$R_0 = R'_0 \sin \xi_0.$$

Hence

$$\frac{\pi R_0}{\sigma R'_0} = \frac{\sin \xi_0}{2(1 - \cos \xi_0)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\tan \frac{\xi_0}{2}}.$$

Since the angle ξ_0 derived is always is rather small, we can put

$$\frac{\pi R_0}{\sigma R'_0} = \frac{1}{\tan \xi_0}.$$

Using this formula and formulas (46) and (51), we can write:

$$\frac{CC_1}{U_0 R'_0} = \frac{4c_1 r_1^3 \pi R_0^2}{3U_0 \sigma R'_0} = \frac{4c_1 r_1^3 R_0}{3U_0 \tan \xi_0}.$$

We now eliminate the angle ξ_0 . Let the mean square transverse velocity of the droplet be the initial condition of atomization v_0 ⁴⁴, so we can approximately set⁴⁵:

$$\tan \xi_0 = \frac{v_0}{U_0}.$$

Of course, the jet cone can not have very sharp boundaries in general, and individual droplets can deviate very much from the axis of the jet, but the main mass of them will be inside the cone, determined by the angle ξ_0 . Therefore, we assume approximately that all droplets whose distance from the orifice is equal to x are distributed uniformly in the part of the thin spherical layer of the same radius x that is inside the cone.

Further, since the mean square velocities u_0 and v_0 are the same, which is evident from the shape of the distribution function symmetric with respect to k_x and k_y , then, consequently,

$$v_0 = \frac{c_1}{\sqrt{2}}.$$

Hence

$$\tan \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_1}{U_0}$$

p. 22L

⁴⁴Translator's note: I assume that Natanzon means that v_0 is the initial velocity of a droplet which was just formed.

⁴⁵We do not take into account here the fact that due to the gradual loss of the velocity of the relative motion of the droplets, the angle ξ_0 should decrease somewhat with increasing x , forming a cone which will bend in the direction of its axis. This will affect the density γ of the droplets, which will fall somewhat slower with increasing x than we are taking. Therefore, the number of collisions should be larger, and consequently, the growth of the volume of droplets is somewhat more sharp than is the case in our calculation.

⁴⁶Translator's note: The denominator of the right fraction was u_0 in the original, but this appears to have been a typographical error.

and, consequently,

$$\frac{CC_1}{U_0 R_0'} = \frac{4\sqrt{2}}{3} R_0 r_1^3.$$

Substituting this expression into formula (53), we obtain:

$$r_2^4 = r_1^4 + \frac{16\sqrt{2}}{3} r_1^3 R_0. \quad (54)$$

Since the first term on the right has a negligible value in comparison with the second, we can drop it and write definitively:

$$r_2 = 2r_1 \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2} R_0}{3 r_1}}. \quad (55)$$

This formula approximately takes into account the increase in the droplet size when it moves in the jet cone and refers to the final state of the atomized jet.

We calculate r_2 using the values of r_1 obtained above. The result is given here along with the value of the velocity U_0 and r_1 . In fig. 8, two curves depict the variation of r_1 and r_2 , depending on U_0 .

$U_0 \cdot 10^{-4}$ (cm/sec)	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7
r_1 (microns)	3.22	2.28	1.72	1.35	1.10	0.914
r_2 (microns)	16.4	12.6	10.24	8.57	7.31	6.36

For the diameters of medium-sized droplets in Sass's experiments, we can take the following values:

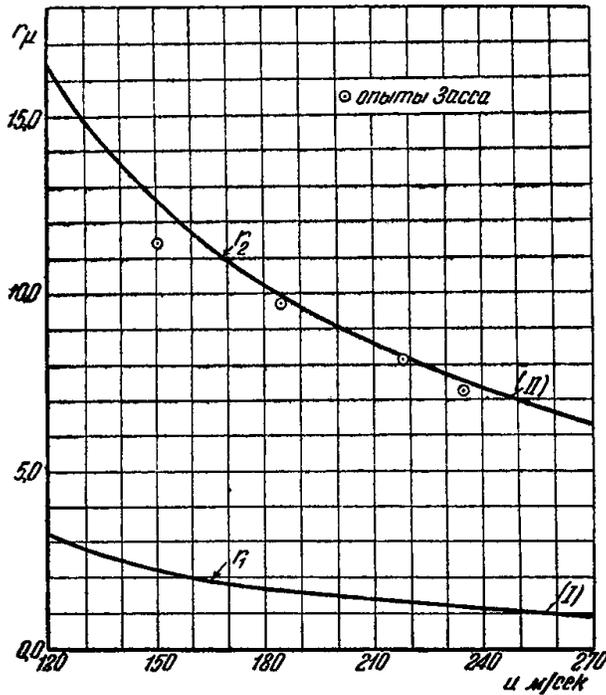
$U_0 \cdot 10^{-4}$ (cm/sec)	1.51	1.85	2.18	2.35
d (microns)	22.9	19.5	16.3	14.3

If we take four points corresponding to Sass's experiments, we plot it on the diagram in fig. 8, they are rather well placed on curve (II). p. 22R

This agreement of the results of theory and experiment should not yet be given much weight. First of all, we do not know exactly the conditions of Sass's experiments, which would allow us to make the correct and appropriate calculations. In addition, it would be necessary to make a correction for the back pressure, which in the experiments of Sass was equal to 10 atm, and then the experimental points would be positioned much higher.

With other experiments, the agreement is also much worse. For example, in D. W. Lee's experiments, at the same orifice diameter and pressure drop, the diameter d of the droplet varied from 30 to 40 microns.

As for I. V. Astakhov's experiments, he obtained diameters in the range from 190 to 140 microns with a change in velocity from 62 to 119 m/s. Our formulas for this case, apparently,



Translator's note: опыты Засца = *experiments of Sass*

м/сек = *m/s*

Figure 8

are inapplicable, since the Reynolds numbers turn out to be too small and close to the critical value. Probably, the role of turbulence in these cases is already insignificant, and the whole phenomenon proceeds differently.

The foregoing calculation method still yields results, the order of which is quite close to those values that are observed experimentally. Further improvement of the theory, it is hoped, will bring its results closer to the data of the experiment, but this will be possible only when the latter accumulate in sufficient quantity and give a completely clear picture of the phenomenon, which is not yet available (at least if we speak of quantitative dependences).

Concluding remarks

The proposed calculation of the fineness of atomization can, of course, be considered only as an attempt. Numerous unverified assumptions, which were required in order to bring the calculation of the diameter of the droplet to completion, still need to be reviewed. It is

possible, however, that in this way it will be possible to obtain a more rigorous theory of this phenomenon.

We considered atomization of fuel as consisting of two stages. First, the fuel passes from the coherent state in the jet to the initial state of atomization. The total energy of the liquid in both states is the same; this circumstance makes it possible to determine the distribution function φ . Then, when the droplet mist is moving during droplet collisions and coalescences, they grow in size and transition to the final atomized state. In this process, the energy value E is not conserved, since due to inelastic collisions, part of it will go to heating and fluid oscillations inside the droplet.

A more accurate study of the number and consequence of collisions requires, first of all, consideration of the spatial distribution of droplets. In this case, it would be possible to find not only the average volume of the droplet in the final atomized state, but also the distribution function for this state.

If in fact the phenomenon does proceed in a similar way, then, of course, the division into stages can not be so sharp. In addition, geometrically the jet outside the orifice and its cone do not feature the regularity and simplicity of shape, as we assumed. p. 23L

Finally, the effect of the back pressure of the surrounding air environment, perhaps, we could take into account as follows. Since the medium must inhibit the motion of the droplets, the decrease in the relative velocity of their motion occurs to first approximation in proportion to the density of the medium. These velocities are generally small, and for the resistance, one can apply the Stokes formula. Hence, as the velocity c falls, so will the number of collisions, and, consequently, so will the growth of the droplet volume in the transition from the initial to the final state of atomization.

In addition, the medium will be very strongly inhibited and the average motion of all droplets. Due to the high speed compared with c , this deceleration will already be proportional to the square of U_0 ; therefore, the cone angle of the jet with increasing back pressure will increase, the density of the droplet distribution will decrease, and consequently the number of collisions will decrease. This will also entail a somewhat slower growth in the volume of droplets. p. 23R

Thus, it is probably possible to explain the decrease in the average volume of droplets with increasing back pressure.

However, it is necessary, of course, that the experiments finally establish how this phenomenon proceeds, since there is a disagreement between different authors.

цеховое и внутрицеховое планирование и ряд других мероприятий позволят максимально использовать производственную мощность оборудования, ликвидировать простой и заниженные режимы работы, устранить помехи на пути стахановского движения.

Стахановцы наших предприятий все настойчивее выдвигают требование об упорядочении организации производства. В своих выступлениях на отчетных собраниях о деятельности заводов за 1937 г. они единодушно требуют от хозяйственников и инженеров внедрения такой слаженности производства, которая исключала бы простой, хождение за инструментом и материалами, неправильное использование станков и т. д., т. е. всего того, что приводит к непроизводительной трате времени и материалов.

Чтобы добиться этой слаженности техпроцесса, командирам производства, хозяйственникам и инженерам нужно взяться за дело по-большевистски, раз навсегда порвать с самотеком, сплотить вокруг себя лучших стахановцев и использовать их опыт по организации производства. Выполнение и перевыполнение производственного плана 1938 г. по дизелестроению должно быть обеспечено полностью. Именно в этом заключается основная задача работников Главка и заводов дизелестроения.

Руководители — хозяйственники и инженеры — должны твердо помнить великие слова товарища Сталина, что «быть руководителем хозяйства в наших условиях — это значит удостоиться великой чести и великого почета, удостоиться великого доверия со стороны рабочего класса, со стороны народа».

В. Я. НАТАНЗОН
(ЦИАМ)

О распыливании топлива в двигателях Дизеля

Распыливание топлива при впрыске в двигателях внутреннего сгорания зависит, в основном, от динамического воздействия воздуха на частицы топлива и возмущений струи топлива в форсунке.

До настоящего времени изучению подвергалось, главным образом, влияние первого фактора. В настоящей статье дается метод определения кривой распределения частиц топлива в струе по величине и средней их величины на основе статистических методов кинетической теории газов под влиянием второго фактора.

The atomization of fuel spray in internal combustion engines is mainly influenced by dynamic actions of air on fuel particles and distortions of fuel flow in the injection valve.

The first factor was generally investigated up to the present time. A method is given in the paper for determining the size distribution curves of fuel spray particles and their mean size (based on the statistical methods of the gas dynamics) as influenced by the second factor.

Введение

Распыливание жидкого топлива при помощи форсунок имеет большое значение для рабочего процесса двигателей Дизеля. Изучение этого явления ведется в различных направлениях: рассматривается поведение топливной струи по выходе из соплового отверстия форсунки, дальность проникновения струи, распространение распыленной струи по пространству и, наконец, мелкость или степень распыливания топлива. Последнее обстоятельство изучалось в множестве экспериментальных работ. Литература приведена в руководстве Засса¹ и более полно в работе трех авторов: de Jukasz, Zahn, Schweitzer².

Явление распыливания топливной струи состоит в следующем. Топливо вытекает обычно из прямого круглого отверстия под большим давлением. Почти непосредственно у самого отверстия топливная струя начинает распадаться, от нее отделяются частицы неправильной формы, которые участвуют в общем движении струи. Через некоторое время после выхода из отверстия отделившиеся частицы расходятся друг от друга и от струи, из которой они были выброшены на достаточно большое расстояние. Будучи вполне изолированной, каждая частица благодаря поверхностному натяжению и внутреннему движению принимает шарообразную форму капли. При этом капля участвует в среднем движении всей струи и, кроме того, имеет еще свою относительную скорость, благодаря которой она отделилась от струи. Вся струя превращается в мелкий капельный туман, который с внешней стороны имеет форму расходящегося конуса

¹ Засс, Бескомпрессорные двигатели Дизеля, ОНТИ, 1935, стр. 58.

² K. J. de Jukasz, O. F. Zahn, P. H. Schweitzer, On the Formation and Dispersion of Oil Sprays. Bulletin the Pennsylvania State College № 40, 1932.

с вершиной у соплового отверстия и осью, совпадающей с осью отверстия.

При рассмотрении под микроскопом капель, собранных после того, как они под влиянием сопротивления среды потеряли свою скорость, оказалось, что капли получаются самых разнообразных диаметров. Для того чтобы характеризовать мелкость распыливания, которое получается в результате полного распада струи на капли, строят обычно кривые распределения капель по диаметрам, предложенные Häusser и Strobl³. Такие кривые, полученные в результате опытов Засса, приведены на рис. 1. Каждая кривая соответствует определенным условиям вытекания струи. Кривые строятся следующим образом: на горизонтальной оси откладывается диаметр капли, на вертикальной — доля общего числа капель соответствующего диаметра (в процентах). Все кривые имеют один максимум, от которого они несимметрично спускаются к оси абсцисс. Этот максимум соответствует диаметру, наиболее часто встречающемуся во всей массе капель, собранных после распыливания струи. Чем больше диаметр капли отличается от того диаметра, в котором функция распределения имеет максимум, тем реже такая капля встречается в общей массе. Очень малые и очень большие капли встречаются редко, и поэтому при приближении аргумента к нулю и при возрастании его ордината быстро стремится к нулю.

Площади между ординатной и каждой кривой одинаковые, так как они выражают общее число капель, принимаемое всегда за 100%. Поэтому чем больше максимальная ордината, тем реже ордината убывает по обеим сторонам от максимума. Кроме того, чем больше максимум, тем ближе он, как правило, расположен к началу координат. Это обстоятельство выражает тот факт, что более мелкое распыливание будет и более равномерным.

Диаметр наиболее часто встречающейся капли

³ Ф. Засс, цит. место, стр. 58.

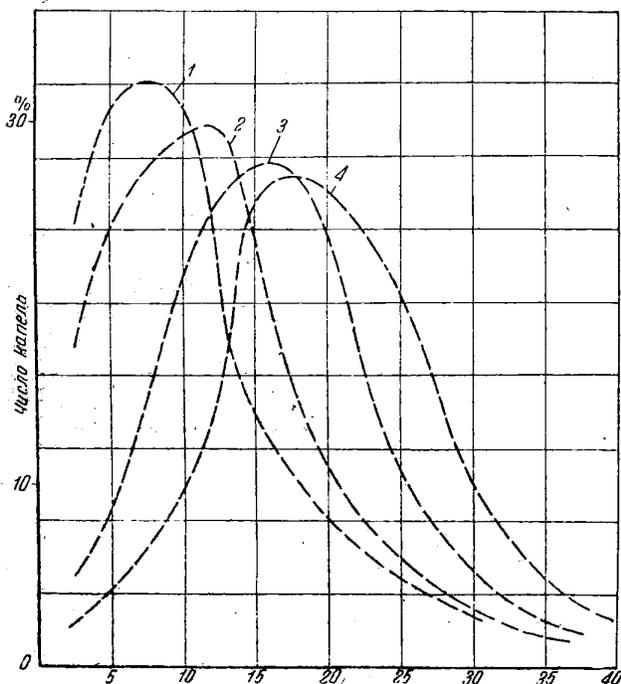


Рис. 1

является параметром, довольно хорошо характеризующим мелкость и равномерность распыливания. Но, кроме этого параметра, можно для характеристики распыливания составлять еще различные средние величины, например, средний диаметр или диаметр капли со средним объемом.

Для практических целей быть может не столько важно знать вид кривой распределения, как уметь определять значение какого-либо параметра, достаточно полно характеризующего распыливание с количественной стороны. То, что здесь, повидимому, достаточно для такой характеристики знать только один параметр, конечно, благоприятствует всякой попытке как экспериментального, так и теоретического изучения этого явления.

Краткий обзор теоретических и экспериментальных работ по распыливанию

Существует несколько теоретических работ, в которых делаются попытки определения диаметра капли. Н. Triebnigg⁴ вычисляет средний диаметр капли, отбрасывая случайные отклонения его от среднего значения. Диаметр капли определяется в зависимости от поверхностного натяжения топлива и плотности воздуха в том пространстве, куда вытекает топливо. Вычисление основывается на представлении о правильном образовании в конце вытекающей струи каждой капли. Полученная формула для радиуса капли имеет следующий вид:

$$r = 4,6\alpha \frac{\gamma_b}{\gamma_l} \frac{1}{\psi} \frac{1}{p},$$

где α — поверхностное натяжение; γ_b и γ_l — удельные веса топлива и воздуха в пространстве, где происходит распыливание; ψ — коэффициент сопротивления воздуха движению топливной струи (сопротивление принимается пропорциональным квадрату скорости); p — избыточное давление топлива перед сопловым насадком относительно среды, куда производится впрыск.

Формула дает хорошее совпадение с опытом только для некоторых интервалов значений γ_l и p . При малых значениях γ_l , соответствующих атмосферному давлению, формула дает совершенно неправильные значения. Формула вообще не годится для малых γ_l , так как для $\gamma_l = 0$ получается бесконечный радиус. Однако распыливание в вакууме может происходить, и хотя радиус капли при малых давлениях воздушной среды получается несколько большим, но все же он растет гораздо медленнее, чем по формуле Triebnigg. На рис. 2 приведена графически зависимость диаметра капли от плотности воздушной среды, полученная на основании опытов Засса⁵. Эти результаты показывают, что роль сопротивления не столь значительна, как это вытекает из теории Triebnigg.

Роль воздушной среды, в которой происходит распыливание, по-разному оценивается различными авторами. Например, W. Lee⁶ приходит к выводу, что величина противодавления почти не влияет на размер капель (см. кривые, приведенные в его

⁴ Н. Triebnigg, Der Einblase und Einspritzvorgang bei Dieselmaschinen. Wien 1925.

⁵ Ф. Засс, стр. 59.

⁶ W. Lee, The Effect of Nozzle Design and Operating Conditions of the Atomisation and Distribution of Fuel Sprays, Nat. Adv. Com. for Aeron., Rep. № 425.

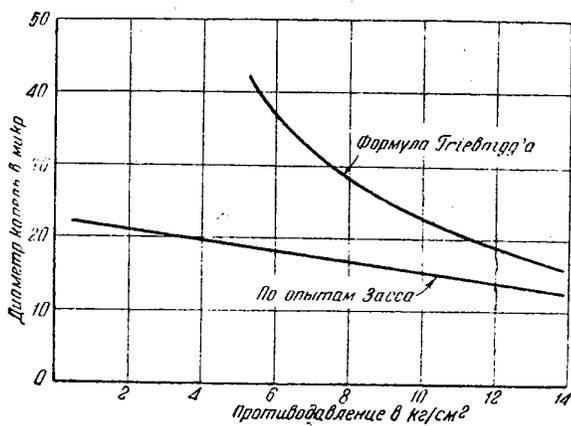


Рис. 2

работе на рис. 11). При этом самое меньшее противодавление достигало у него приблизительно 0,5 ат.

К тому же результату приходит и И. В. Астахов⁷, результаты опытов которого не обнаружили зависимости распределения капели по диаметрам от противодавления. Правда, здесь брались только довольно высокие противодавления от 5 до 12 ат.

Наоборот, Castleman⁸ считает, что распыливание топлива во всех случаях происходит только благодаря возмущающему действию воздуха на струю, сопротивление которого отрывает частицы топлива от струи.

Возвращаясь к формуле Tribnigg, отметим, что радиус капли пропорционален величине: $\frac{\alpha}{p}$.

Это, повидимому, верно, если считать, что в явлении образования капли главную роль играют энергия поверхностного натяжения и живая сила вытекающей струи. Такая зависимость следует просто из соображений о размерности. Что касается коэффициента пропорциональности, то формула, очевидно, дает неверное выражение для него.

Помимо всего, нужно отметить, что представление о правильном механизме образования капели даже приблизительно не отвечает действительности, так как распад струи происходит совершенно нерегулярно с одновременным образованием множества разнообразных по диаметру капели, которые как бы выбрасываются из струи в разные стороны.

Другой подход к изучению распада струи дан в работе Rayleigh⁹, который рассматривал образование правильных капели одного и того же диаметра из спокойно вытекающей с небольшой скоростью цилиндрической струи. Он показал, что капиллярные колебания поверхности такой струи неустойчивы и приводят к распаду ее и образованию капели, величина которых зависит от длины волны на поверхности струи.

Исследование для аналогичных условий вытекания струи, но при наличии вязкой жидкости выполнено Weber¹⁰.

⁷ И. В. Астахов, Влияние вязкости топлива и других факторов на мелкость распыливания. „Дизелестроение“ № 2, 1937.

⁸ R. A. Castleman, The Mechanism of Atomisation Accompanying Solid Injection, Nat. Adv. Com. f. Aeron., Rep. № 440, 1932.

⁹ Rayleigh, The Theory of Sound, v. 11, 1921, стр. 351.

¹⁰ C. Weber, Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, Zeitsch. f. Ang. Math. und Mech. Bd. 11, 1931.

Распад такого рода наблюдается на опыте при малых скоростях вытекания струи. При больших скоростях не получается и самой струи, так как жидкость распыливается непосредственно у самого отверстия.

Таким образом при малых и больших скоростях явление распада струи протекает различно. В первом случае капли образуются из цилиндрической струи на некотором расстоянии от отверстия, во втором случае струя распадается непосредственно у отверстия, образуя конус, заполненный жидкостью, состоящей из отдельных частей.

Между этими крайними случаями, повидимому, существуют промежуточные. Условия перехода от одного типа распыливания к другому еще недостаточно исследованы¹¹.

Замечания к постановке задачи

В настоящей работе нас интересует только случай больших давлений, которые применяются для распыливания топлива в бескомпрессорных двигателях Дизеля.

Ниже делается попытка построить расчет среднего диаметра капли, перенося в эту область статистические методы кинетической теории газов. При этом мы пока ограничиваемся случаем отсутствия противодавления воздушной среды, чтобы несколько упростить сперва эту очень сложную задачу. Решение должно служить первым приближением для случая малых плотностей воздуха, для которых производились опыты. Зависимость, представленная на рис. 2, показывает, что при малых плотностях, соответствующих противодавлению, равному 1 ат, влиянием воздуха, повидимому, можно пренебречь.

Мы связываем явление распыливания с турбулентностью течения топлива в отверстии и принимаем, что единственная причина этого распада при отсутствии противодавления заключается в турбулентности. Мнение это высказывалось неоднократно. Schweitzer¹² в упомянутой выше работе причину распада струи приписывает совместному действию турбулентности и сопротивления воздуха. Чем больше скорость, тем большую роль играет первый фактор и тем ближе к отверстию начинается распад струи. При больших скоростях распад наступает непосредственно у отверстия даже в том случае, если действие воздуха устранить. Противодавление вообще только усиливает действие первого фактора.

На основании изложенного мы будем в первом приближении считать, что при малых противодавлениях сопротивлением воздуха можно вообще пренебречь.

Вывод функции распределения

Мы рассматриваем установившееся состояние непрерывного распада струи на капли. В пространстве, куда вытекает струя, в единицу времени образуется некоторое число N вполне сформировавшихся сферических капели, которые находятся в беспорядочном относительном движении и, кроме того, участвуют в общем среднем движении всей струи. Среднее число образовавшихся в единицу времени капели за большой промежу-

¹¹ Об этом см. Bull. Pennsylv. Coll. № 40.

¹² Schweitzer, Bull. Pennsylv. Coll. № 40.

ток времени при установившемся состоянии остается неизменным. Также неизменно и распределение этих капель по радиусам. Наша задача сводится к тому, чтобы из соображений, аналогичных тем, которые развиваются в кинетической теории газов, вывести функцию распределения капель по радиусам.

Для этого одновременно с радиусом капли необходимо рассматривать также ее скорость поступательного и вращательного движения по отношению к одним и тем же осям координат, которые движутся поступательно, со средней скоростью движения струи.

Пусть струя вытекает из прямого круглого цилиндрического отверстия и пусть средняя по сечению скорость в отверстии будет U_0 . По этой скорости легко получить секундный расход топлива. Когда нет сопротивления среды при вытекании топлива, количество движения струи должно сохраняться по времени. Поэтому можно считать, что средняя скорость каждой частицы жидкости сохраняется и равна U_0 . Но, кроме того, каждая частица жидкости может иметь еще независимое от среднего относительное движение, источником которого являются турбулентные пульсации, возникающие еще тогда, когда частица жидкости находилась в цилиндрическом отверстии форсунки.

Рассмотрим систему вполне образовавшихся в единицу времени капель. Допустим сперва, что каждая капля, образовавшись, ведет далее вполне независимое существование в течение неограниченно большого времени. Иными словами, мы пока будем предполагать, что каждая капля, будучи выброшена из струи, почти сразу принимает шарообразную форму с определенным радиусом r и получает какие-то начальные скорости поступательного и вращательного движения, которые затем уже остаются неизменными. Это значит, что мы пока не будем принимать во внимание возможных столкновений капель друг с другом, при которых должны вообще меняться и скорость и радиус капли (последний в силу возможных слияний столкнувшихся капель).

Механическое состояние отдельной капли в основном определяется ее радиусом r , составляющими импульсов p_x, p_y, p_z в поступательном движении и моментов импульсов k_x, k_y, k_z — во вращательном.

Что касается координат капли в пространстве, в котором она движется, то они в дальнейшем не играют никакой роли, так как мы не рассматриваем пока ни столкновений ни силового поля, и, следовательно, скорость капли не будет связана с ее координатами.

Составляющие импульсов капли берутся здесь по отношению к поступательно движущейся со скоростью U_0 системе координат. Пусть одна из осей системы координат, например ось x , постоянно при этом совпадает с осью струи и осью отверстия форсунки.

Для каждой капли значения семи величин $r, p_x, p_y, p_z, k_x, k_y, k_z$ имеют случайные значения и определяются причинами, которые мы проследить не в состоянии.

Следуя общему методу кинетической теории газов, рассмотрим фазовое пространство этих семи величин. Новое в нашем случае сводится к введению переменного радиуса частицы, который, главным образом, и интересует нас. «Газ»,

который здесь рассматривается, состоит из частиц всевозможных размеров, механически друг на друга не действующих. Взаимодействие их относится только к краткому периоду их образования, но, строго говоря, в этот период даже не существовало тех частиц-капель, состояние которых можно было бы описать приближенно семью координатами.

Повторим кратко в применении к этому обобщенному фазовому пространству рассуждения, которые приводят к выводу формулы Максвелла в кинетической теории газов.

Механическое состояние каждой капли изображается точкой в фазовом пространстве. Так как внешнего силового поля у нас нет и так как пока предполагается, что столкновений нет, то координаты изображающих точек в фазовом пространстве не меняются по времени и равны постоянно их начальным значениям.

Рассмотрим N таких точек, соответствующих числу капель, выброшенных из струи в единицу времени. Обозначим искомую функцию распределения их в фазовом пространстве (фазовую плотность) через φ . Это будет функция наших семи аргументов, которую мы будем искать из условия максимума вероятности состояния системы.

Нужно заметить, что наш случай довольно сильно отличается от системы молекул, которой занимается кинетическая теория газов. Прежде всего мы здесь выделяем в отдельную систему капли, образовавшиеся в единицу времени. Однако на самом деле они находятся во взаимодействии между собой и с ранее образовавшимися каплями в пространстве, где распыливается топливо. Далее все капли не представляют собой одинаковых объектов и общее секундное число их N есть также случайная величина, заранее неизвестная.

Первое обстоятельство требует рассмотрения координат капли, т. е. доведения общего числа аргументов фазовой плотности до десяти. Только таким образом можно ввести учет столкновений капель и их влияния на вид функции φ . Однако это очень сложная задача, так как последствия столкновений капель гораздо труднее учесть, чем, например, столкновений молекул, трактуемых как упругие шары.

Ввиду этого мы пытаемся определить тот вид функции φ , который соответствует начальному состоянию N образовавшихся капель. Это состояние сохраняется в течение короткого промежутка времени, когда действие столкновений еще не может сильно отразиться на функции распределения. Что же касается дальнейшего изменения размеров и числа капель, которое произойдет от столкновений, то мы попытаемся оценить его хотя бы грубо приближенно, рассматривая движение образовавшейся капли в капельном тумане.

Число капель N и функцию распределения мы считаем постоянными во времени, так как рассматриваем установившийся процесс. Число образовавшихся капель является искомым в этой задаче; заранее известно только, что это есть постоянное число, характерное для процесса распада струи. Но мы знаем общий объем капель, — эта величина и позволяет определить постоянные, входящие в функцию φ , которые в кинетической теории газов определяются через число частиц в данном объеме.

Вид функции φ существенным образом зависит от интегралов уравнений движения рассматриваемого

мых частиц. Главную роль здесь играет интеграл энергии. В нашем случае рассматривается начальное состояние капельной системы и ее переход от предыдущего состояния, когда она образовывала еще связную жидкую массу. Этот переход считается как бы внезапным. Оба состояния связываются, однако, тем, что энергия системы остается для них одинаковой. Это обстоятельство приводит к форме функции φ , подобной той, какую она имеет в кинетической теории газов. Разница лишь в том, что здесь есть еще одно переменное r .

Обратимся теперь к выводу выражения для функции φ . Как и в кинетической теории газов, область, где могут быть фазовые точки, ограничена некоторыми пределами, зависящими от величины всей энергии и всего объема N капель. Разбиваем эту область фазового пространства на m ячеек; пусть объем ячейки с номером i будет ω_i . Пусть случайное распределение N фазовых точек нашей капельной системы определяется числами n_i , где n_i — число точек в ячейке ω_i . Средняя плотность точек в отдельной ячейке будет $\varphi_i = n_i / \omega_i$.

Число способов, при помощи которых это распределение из N капель может быть осуществлено, как известно, равно

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!}, \quad (1)$$

где

$$N = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Вероятность какого-нибудь случайного распределения, характеризуемого числами n_i , пропорциональна выражению:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} \dots \omega_m^{n_m}. \quad (2)$$

Применяя обычное преобразование логарифма W при помощи формулы Стирлинга, получим:

$$\ln W = \sum_{i=1}^m (n_i \ln \omega_i - n_i \ln n_i) = - \sum_{i=1}^m \omega_i \varphi_i \ln \varphi_i. \quad (3)$$

Далее заменяем дискретную картину распределения приближенной непрерывной¹³. При этом функция φ будет определяться уже во всем фазовом пространстве. Вместо конечного объема ячейки ω_i мы будем рассматривать элемент объема фазового пространства

$$d\Omega = dp_x dp_y dp_z dk_x dk_y dk_z dr. \quad (4)$$

Плотность φ_i , зависевшая от номера ячейки, теперь обращается в непрерывную функцию координат фазового пространства. Наконец, суммы (1) и (3) обращаются в интегралы:

$$N = \int \varphi d\Omega; \quad (5)$$

¹³ Здесь сохраняется, конечно, обычное допущение о различии двух распределений, определяемых одной и той же системой чисел n_i , но с различным составом элементов в отдельных ячейках.

¹⁴ Здесь допускается, что вероятность события, состоящего в том, что определенная точка находится в ячейке ω_i , не зависит от номера этой ячейки и пропорциональна ее объему.

¹⁵ E. Borel, *Mécanique Statistique Classique*, Ser. „Les applications de la théorie des probabilités“, т. II, вып. III, 1925, стр. 63.

$$H = - \ln W = \int \varphi \ln \varphi d\Omega, \quad (6)$$

распространенные на все пространство.

Установившееся состояние характеризуется максимальной вероятностью, т. е. максимальным значением W или минимальным значением H . Отсюда возникает задача об определении минимума интеграла (6). В данном случае при разыскании минимума нужно принять во внимание условие (5) и другие аналогичные условия.

К последним относится условие сохранения энергии. Действительно, каков бы ни был процесс образования капель, общая энергия N капель будет такова же, как энергия жидкой струи, из которой капли образовались. Энергию струи мы можем, делая различные более или менее вероятные допущения, приближенно определить. Следовательно, мы будем знать общую энергию системы N капель. В эту величину мы не включаем энергию поступательного движения со скоростью U_0 , которая у капель будет такой же, как и до их образования у жидкой струи. Рассматриваемая энергия состоит из кинетической энергии беспорядочного относительного движения капель и из потенциальной энергии поверхностного натяжения.

Если полную энергию одной капли обозначить через ϵ , то полная энергия N капель выразится интегралом:

$$E = \int \epsilon \varphi d\Omega, \quad (7)$$

распространенным по всему фазовому пространству.

Решая вариационную задачу об определении минимума интеграла (6) при условии (5), (7)¹⁶ мы получим, что функция распределения φ , обращающая интеграл в минимум, имеет вид:

$$\varphi = A e^{-\lambda \epsilon}, \quad (8)$$

где A, λ — две произвольные постоянные, которые мы определим, подставляя выражение (8) в интегралы (7), и интеграл

$$Q = \int \tau \varphi d\Omega, \quad (9)$$

выражающий тот факт, что общий объем N капель, образовавшихся из струи в единицу времени, равен секунднему расходу топлива через сечение отверстия форсунки. Этот расход, обозначенный через Q , очень просто связан со средней скоростью U_0 . Величина τ , входящая под знак интеграла, есть объем отдельной капли и, следовательно, зависит только от радиуса r .

Интеграл (9) дает второе соотношение для определения постоянных A, λ , которое заменяет собой соотношение (5).

Выражение для энергии капли и элемента фазового пространства

Чтобы воспользоваться уравнениями (7) и (9) для определения произвольных постоянных λ и A , составим выражение энергии капли ϵ .

Возьмем подвижные оси координат, связанные со струей. Пусть ось x постоянно совпадает с осью струи и отверстиями форсунки, а начало координат движется со средней скоростью движения жидкости U_0 .

¹⁶ E. Borel, *Mec. Stat.*, стр. 72.

Нас интересует только живая сила беспорядочного движения каплей (т. е. их относительное движение). Поэтому обозначим через p_x, p_y, p_z проекции импульса капли на оси; тогда живую силу поступательного движения капли по отношению к подвижным осям можно представить так:

$$\frac{1}{br^3} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

где

$$b = \frac{8\pi}{3} \rho$$

и ρ — плотность жидкости.

Это выражение можно взять в форме:

$$\frac{p^2}{br^3}, \quad (10)$$

где

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Так как компоненты импульса явно не войдут в выражения функции φ , то можно в фазовом пространстве перейти к полярным координатам, что будет несколько проще. Элемент объема

$$dp_x dp_y dp_z$$

представим теперь в таком виде:

$$4\pi p^2 dr. \quad (11)$$

Так как интегралы (7) и (9) нужно распространить на все фазовое пространство, то интегрирование по p нужно выполнить в пределах от 0 до ∞ .

Обратимся теперь к энергии вращения. Пусть k_x, k_y, k_z будут проекциями момента импульса капли, тогда живая сила вращения около оси, проходящей через центр тяжести, должна быть равна

$$\frac{1}{2I} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

где

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho r^5.$$

Обозначая через k момент импульса, т. е. полагая

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

найдем, что живая сила вращения равна

$$\frac{k^2}{cr^5}, \quad (12)$$

где

$$c = \frac{16}{15} \pi \rho.$$

Подобно предыдущему элемент

$$dk_x dk_y dk_z$$

представим в виде

$$4\pi k^2 dk. \quad (13)$$

Интегралы по k берем в пределах от 0 до ∞ .

Вообще говоря, искомая общая живая сила не исчерпывается двумя указанными частями. К ней нужно было бы прибавить еще живую силу колебания жидкости в каплях. Однако это очень усложнило бы нашу задачу, и мы вынуждены в дальнейшем этой частью живой силы пренебречь. Впрочем отбрасываемая живая сила едва ли будет большой, но все же роль ее остается невыясненной.

Потенциальная энергия в главной своей части состоит из энергии поверхностного натяжения, которая для одной сферической капли выразится по формуле Гаусса так:

$$ar^2, \quad (14)$$

где r — радиус капли;

$$a = 4\pi\alpha \quad (15)$$

и α — коэффициент поверхностного натяжения.

Поверхностная пленка создает внутри капли избыточное давление, и если учесть сжимаемость топлива, то получим еще некоторую энергию сжатия. Это, однако, — незначительная величина, в чем можно убедиться путем численных подсчетов. Поэтому потенциальную энергию сжатия мы отбрасываем. Равным образом мы отбрасываем и ту часть потенциальной энергии, которая получается при отклонении поверхности от сферической формы во время колебаний.

Таким образом полную энергию в первом приближении можно представить формулой:

$$\epsilon = \frac{p^2}{br^3} + \frac{k^2}{cr^5} + ar^2. \quad (16)$$

Вместе с этим элемент объема фазового пространства вместо (4) представим в форме:

$$d\Omega = 16\pi^2 p^2 k^2 dp dk dr. \quad (17)$$

Определение произвольной постоянной λ

Выполним интегрирование в формуле (5). Подставляя сюда выражение φ и $d\Omega$, получим, что

$$N = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^5}} dk \right\} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

По r интегрирование распространяется от 0 до ∞ , так как r , очевидно, не может иметь отрицательного значения.

Интегралы в скобках принадлежат к известному типу¹⁷, и мы можем написанное выражение представить так:

$$N = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty r^{12} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

Воспользуемся формулой:

$$\int_0^\infty r^n e^{-\lambda ar^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (18)$$

где $\Gamma(x)$ обозначает функцию «гамма». В таком случае будем иметь окончательно:

$$N = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}. \quad (19)$$

Вычисляя Q , подставляем в формулу (9) выражение функции φ , $d\Omega$ и $\tau = \frac{4\pi}{3} r^3$. Это дает такой результат:

$$Q = \frac{4\pi}{3} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2} \Gamma(8) (a\lambda)^{-8}. \quad (20)$$

Наконец, обратимся к формуле (7) и заметим, что на основании (16) общее выражение энергии E разбивается на три части:

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

¹⁷ Здесь и ниже мы пользуемся формулами:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\xi x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \xi^{-\frac{3}{2}};$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\xi x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \xi^{-\frac{5}{2}}.$$

Первую часть E_1 можно представить так:

$$E_1 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^3}} dk \right\} \frac{1}{br^3} e^{-\lambda ar^2} dr.$$

Вычисляя интегралы, стоящие в скобках, находим, что

$$E_1 = \frac{3}{2} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} \int_0^\infty r^{12} e^{-\lambda ar^2} dr,$$

следовательно,

$$E_1 = \frac{3}{2} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}.$$

Совершенно аналогичное вычисление показывает, что

$$E_2 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^3}} dk \right\} \frac{1}{cr^3} e^{-\lambda ar^2} dr$$

и получается равным E_1 .

Третья часть энергии равна:

$$E_3 = 16\pi^2 A \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\lambda p^2}{br^3}} dp \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{\lambda k^2}{cr^3}} dk \right\} ar^2 e^{-\lambda ar^2} dr$$

или

$$E_3 = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} a \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{15}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{15}{2}}.$$

Пользуясь формулой для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (21)$$

находим, что

$$E_3 = \frac{13}{2} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}.$$

Теперь остается сложить три найденных выражения для E_1 , E_2 , E_3 ; это дает:

$$E = \frac{19}{2} \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) (a\lambda)^{-\frac{13}{2}}. \quad (22)$$

Чтобы найти λ , составим частное от деления формулы (22) на (20):

$$\frac{E}{Q} = \frac{19}{2} \frac{8}{4\pi} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}{\Gamma(8)} (a\lambda)^{\frac{3}{2}}.$$

Пользуясь формулой (21), получим:

$$x = \frac{\Gamma(8)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то коэффициент x должен иметь такое значение:

$$x = 17,51.$$

Пользуясь формулой (15), мы можем теперь написать, что

$$\frac{E}{Q} = \frac{19 \cdot 3}{2x} a (a\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

отсюда

$$(a\lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1,628 \frac{aQ}{E}. \quad (23)$$

Формулой этой мы воспользуемся ниже, она определяет искомую постоянную λ .

Распределение капель по радиусам и определение радиуса средней по объему капли

Найдем теперь распределение капель по радиусам и выражение для некоторых величин, характерных для этого распределения.

Если нас интересует распределение образовавшихся капель по радиусам независимо от того, какие скорости имеют капли, то мы должны проинтегрировать функцию ψ по всем переменным, кроме r . Если это выполнить и результат обозначить через $Nf(r)$, то будем иметь:

$$Nf(r) = \pi^3 A \frac{(bc)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}} r^{12} e^{-\lambda ar^2}.$$

Абсолютное число капель, радиус которых содержится в интервале $(r, r+dr)$, а поступательная и угловая скорости какие угодно, равно:

$$Nf(r) dr.$$

Соответствующее относительное число, т. е. доля общего числа капель, радиус которых содержится в интервале $(r, r+dr)$, получится делением на N , следовательно, это число должно быть равно:

$$f(r) dr = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} (a\lambda)^{\frac{13}{2}} r^{12} e^{-\lambda ar^2} dr. \quad (24)$$

Можно перейти к безразмерным координатам, вводя переменную x по формуле:

$$x = (\lambda a)^{\frac{1}{2}} r.$$

Тогда выражение (24) примет вид:

$$j(x) dx = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} x^{12} e^{-x^2} dx, \quad (25)$$

где

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} = 0,6947 \cdot 10^{-2}.$$

Если функцию (25) проинтегрировать в пределах от 0 до ∞ , то получим единицу, в чем легко убедиться на основании формулы (18). Это так и должно быть, так как $f(x) dx$ представляет собой относительное число капель, радиус которых содержится в интервале:

$$\left[(\lambda a)^{-\frac{1}{2}} x; (\lambda a)^{-\frac{1}{2}} (x+dr) \right].$$

Найдем теперь максимум функции $f(x)$. Из уравнения

$$f'(x_0) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)} (12 - 2x_0^2) x_0^{11} e^{-x_0^2} = 0$$

находим:

$$x_0 = \sqrt{6} = 2,449,$$

а отсюда

$$f(x_0) = 0,8026.$$

На рис. 3 представлена кривая $y=f(x)$. Эта кривая почти симметрична относительно максимальной ординаты и близко подходит к нормальной кривой распределения с центром в точке $x_0 = 2,45$.

Мы уже указывали, что это распределение не относится к окончательному составу капель, на которые распадается струя и которые экспериментатор может собрать и наблюдать. Полученное распределение относится к начальному состоянию, когда капли только выброшены из струи.

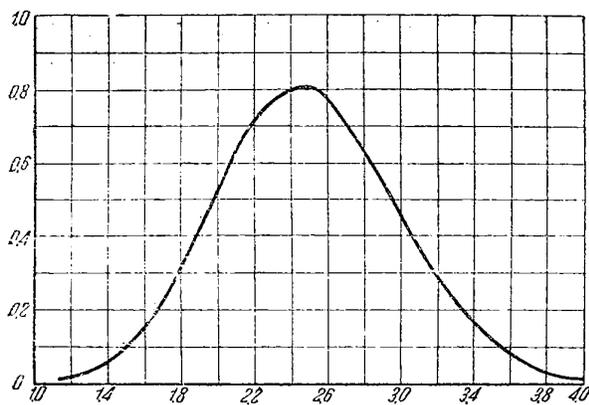


Рис. 3

Если бы столкновения не приводили к слиянию капель, то распределение (25) сохранилось бы постоянным и его можно было бы наблюдать.

Однако при столкновениях чаще всего должны происходить слияния капель. Поэтому объем капля при их беспорядочном движении со временем будет расти. При этом не только увеличивается средний размер капли, но характер их распределения по радиусам должен, конечно, также меняться.

Мы вернемся еще к этому вопросу ниже.

Отметим, что для начального распределения характерна величина радиуса наиболее часто встречающейся капли. Этот радиус можно представить на основании (23) так:

$$r_0 = (a\lambda)^{-\frac{1}{2}} x_0 = 3,987 \frac{aQ}{E}. \quad (26)$$

Вычислим теперь радиус средней по объему капли.

Обозначая его через r_1 , найдем, что

$$\frac{4\pi}{3} r_1^3 = \frac{Q}{N},$$

так как средний объем капли, очевидно, равен общему объему жидкости Q , разделенному на число их N . На основании формул (19) и (20) находим, что

$$r_1^3 = x(a\lambda)^{-\frac{3}{2}}$$

и отсюда

$$r_1 = 4,227 \frac{aQ}{E}. \quad (27)$$

Отсюда между прочим следует, что постоянно должно соблюдаться соотношение

$$r_1 = 1,060 r_0.$$

Таким образом, чтобы знать наиболее важную в практическом отношении величину r_1 , нужно определить энергию каплей E .

(Окончание в следующем номере)

Проф. В. М. ТАРЕЕВ
(Москва)

Наивыгоднейшие размеры окон при петлевой продувке*

Используя ранее опубликованные методы расчета размеров продувочных и выхлопных окон, дан метод определения наивыгоднейших их размеров и параметров процесса продувки, исходя из условия получения наибольшего среднего эффективного давления.

На основе ряда подсчетов выведены эмпирические формулы, дающие возможность непосредственно определять наивыгоднейшие размеры органов выхлопа и продувки двухтактных двигателей с петлевой продувкой для определенных характеристических соотношений параметров двигателя (отношение хода поршня к его диаметру, парциальность выхлопа и продувки и т. д.).

A method is given, based on the previously published methods for calculating the size of scavenging and exhaust ports, for the determination of the best dimensions and factors of the scavenging process to give the highest b. m. e. p.

Empirical formulae are deduced from numerous calculations; these enable the designer to determine directly the most advantageous dimensions for the exhaust and scavenging system of two-stroke cycle engines with a loop scavenging system for given design characteristics (stroke bore ratio, partial factor for exhaust and scavenging etc.).

В предлагаемой статье дается метод определения наивыгоднейших размеров продувочных и вы-

* Настоящая статья была написана проф. Тареевым раньше появления в печати работы Н. List „Leistungsgrenzen von Zweitakt-Dieselmotoren“, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1937, в силу чего ряд положений, выдвинутых в этой работе, к сожалению, не мог быть использован автором в его статье. Ред.

хлопных окон в бескомпрессорных дизелях с петлевой продувкой. Наивыгоднейшими условиями мы считаем здесь те, при которых достигается наивысшее среднее эффективное давление. Поставленная задача разрешена на базе тех общих формул для расчета продувки и выхлопа, которые были опубликованы автором в журнале «Дизелестроение» (см. статьи „Технический расчет

О распыливании топлива в двигателях Дизеля

(См. „Дизелестроение“ № 3)

Характер течения топлива в отверстии форсунки

Прежде чем обратиться к задаче определения энергии E рассмотрим течение топлива в отверстии форсунки.

На рис. 4 представлен разрез отверстия форсунки и вытекающей струи. $MNFE$ — сечение цилиндрического отверстия, $KNFL$ — конус распыленной струи. Длина отверстия L обычно бывает в несколько раз больше его диаметра $2R_0$.

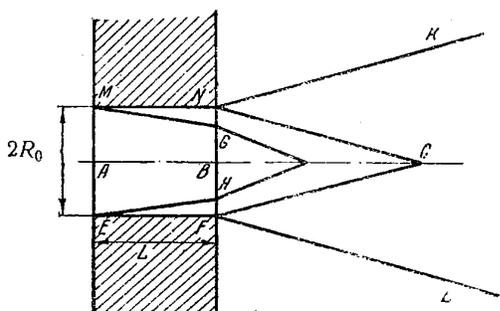


Рис. 4

При достаточно большой средней скорости U_0 в отверстии устанавливается турбулентный режим течения. Так как отношение длины отверстия к диаметру $\frac{L}{2R_0}$ не превышает обычно 2—4, то вся масса топлива в отверстии еще не захвачена турбулентным потоком. Здесь, повидимому, будут происходить те же явления, что и в начальном участке длинной трубы¹.

Начальная кромка ME отверстия обычно бывает острой, и от нее начинается пограничный турбулентный слой. Он прилегает к поверхности отверстия и постепенно утолщается. При достаточной длине отверстия этот слой распространился бы на всю массу жидкости, и тогда по сечению струи установился бы один и тот же профиль скорости, не зависящий от расстояния сечения от входа. Но длина L отверстия в форсунках никогда не бывает такой большой, и поэтому следует допустить, что в конце отверстия NF толщина пограничного слоя меньше радиуса R_0 . Ядро же струи внутри отверстия $MGHE$ заполнено потенциальным потоком. Мы будем приближенно считать, что в этой области скорость всюду постоянна в сечении и равна U_1 .

Когда же струя выходит из отверстия, с ее поверхности отделяются и выбрасываются частицы, превращающиеся в сферические капли. В силу этого нераспыленное ядро струи утоньшается и сходит на-нет где-нибудь в точке C . Вокруг этой части струи или ее ядра находятся в беспорядочном движении выброшенные капли. Такова вероятная картина распада струи².

¹ См. Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, L. Schiller, Движение жидкости в трубах. Русский перевод Г. А. Вольперта, 1936, стр. 94.

² См. начало ст. (ссылку на Schweitzer) в журн. „Дизелестроение“ № 3, 1938.

Распад струи и турбулентность

Основной причиной распада струи, повидимому, являются турбулентные пульсации скорости в пограничном слое, которые накладываются на осредненные по времени скорости движения³.

Пусть, например, осредненная осевая скорость равна U , а радиальная — нулю. Обозначим составляющие скорости пульсаций по оси и радиусу трубы через u' и v' . В каждый данный момент в любом месте потока эти величины могут иметь какое угодно положительное или отрицательное случайное значение. При этом предполагается, что средние значения u' и v' по времени всегда равны нулю.

С пульсациями u' , v' связано введенное Рейнольдсом понятие о турбулентном напряжении или трении, которое действует аналогично вязкости и приводит к резкому изменению осредненного движения по сравнению с ламинарным режимом⁴. Турбулентное трение вдали от границ течения значительно превосходит вязкое трение по своему влиянию на осредненное движение. Только вблизи границ роли меняются: здесь главную роль играет вязкое трение.

Физически турбулентное трение объясняется перемешиванием жидкости между отдельными слоями, взятыми параллельно скорости осредненного движения. Из каждого слоя непрерывно выбрасываются частицы, которые, пройдя некоторый путь в направлении другого слоя, постепенно теряют свою начальную скорость и смешиваются с жидкостью нового слоя, а следовательно, принимают скорость этого слоя. Этот переход частиц из одного слоя в другой (турбулентный обмен) и является причиной пульсации скорости в каждой точке турбулентного потока.

В упомянутой выше работе Schweitzer считает, что в случае турбулентного движения топлива в струе частицы, которыми обмениваются различные слои, могут выбрасываться за пределы струи, как только последняя выйдет из отверстия, и это и является единственной причиной постепенного распада струи при отсутствии противодействия. Этот автор считает, что опыты со струями при турбулентном потоке вполне подтверждают такое представление о распаде.

Мы принимаем изложенное предположение о турбулентном распаде струи как основу для всего расчета.

Будем во всем последующем считать, что энергия пульсации единицы объема жидкости теку-

³ Т. Кármán, Некоторые вопросы теории турбулентности. Труды Интернац. конгресса по прикладной механике в Кэмбридже. 1934. И. Никурадзе, Закономерности турбул. движ. жидкости в главных трубах. Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurw., Hft. 356, 1932. Русск. перев. в сборн. „Проблемы турбулентности“ под ред. М. А. Великанова и Н. Т. Швейковского. ОНТИ, 1936.

⁴ См. вывод уравн. Рейнольдса. Lamb, Hydrodynamics, 5-е изд., 1924, стр. 638 или О. Рейнольдс, Динамическая теория движения несжим. вязк. жидкости. Сб. „Пробл. турбулентн.“, стр. 203.

шей струи равна энергии капле в относительном движении, суммарный объем которых равен единице. Это предположение дает возможность нам вычислить постоянную E в равенстве (7).

Правда, теория турбулентного движения еще не дает возможности вычислить энергию пульсации, но все же это можно сделать, если воспользоваться значением одной величины, полученной из опыта.

Толщина пограничного слоя в отверстии форсунки

Мы должны теперь определить постоянную E . Но прежде нужно заняться вычислением толщины пограничного слоя.

Для случая пограничного слоя, прилегающего к плоской пластинке, существует формула Прандтля⁵:

$$\delta = \frac{0,37x}{\sqrt{\frac{U_1 x}{\nu}}}$$

где δ — толщина слоя на расстоянии x от переднего края пластинки;

ν — кинематическая вязкость и

U_1 — наибольшая скорость жидкости в слое.

Повторяя рассуждения Прандтля, можно вывести формулу и для случая пограничного слоя на цилиндрической поверхности.

На рис. 5 изображено сечение потока в трубе около начального сечения MO . Область, занятая пограничным слоем, заштрихована. В каком-нибудь сечении имеется профиль скорости, представленный на рис. 5а. В части сечения KD скорость постоянная и равна U_1 ; внутри пограничного слоя скорость U меняется от значения U_1 до нуля на стенке. При выводе формулы для толщины слоя δ в зависимости от расстояния x Прандтль принимает, что в слое, как и в трубе, скорость изменяется по закону «одной седьмой», т. е.

$$U = U_1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}},$$

где y — расстояние от стенки.

Искомая формула получается путем применения теоремы импульсов. Частица жидкости, двигаясь параллельно стенке по пути MN , вступает в пограничный слой в точке L . Ее скорость на пути от точки L до точки N убывает на $U_1 - U$. Происходит потеря импульса, причиной чего является внешняя сила трения слоя о стенку.

Подсчитаем потерю импульса в слое на пути от входа OM до сечения на расстоянии x . Обозначим эту потерю, отнесенную к объему жидкости, протекающему в единицу времени через какое-нибудь сечение слоя CD , через J . Тогда эту величину можно представить так:

$$J = 2\pi r \int_0^{\delta} (U_1 - U) U (R_0 - y) dy.$$

Сделаем замену переменных по формуле

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

и подставим выражение для скорости. После этого будем иметь:

⁵ Л. Прандтль, О. Титъенс, Гидро- и аэродинамика, т. II, 1935, стр. 94.

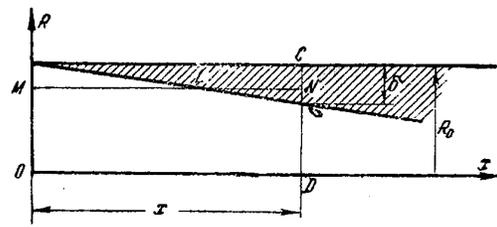


Рис. 5

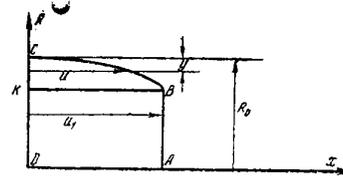


Рис. 5а

$$J = 2\pi r U_1^2 \delta^2 \int_0^1 \left(\eta^{\frac{1}{7}} - \eta^{\frac{2}{7}} \right) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta \right) d\eta.$$

Выполняя интегрирование, найдем:

$$\begin{aligned} J &= 2\pi r U_1^2 \delta^2 \left(\frac{R_0}{\delta} \frac{7}{72} - \frac{7}{240} \right) = \\ &= 2\pi r U_1^2 \frac{7}{72} R_0 \delta \left(1 - 0,3 \frac{\delta}{R_0} \right). \end{aligned}$$

В сечении $x + dx$ толщина получает приращение $d\delta$, а потеря импульса J — приращение dJ . Таким образом dJ есть дополнительная потеря импульса при движении нашего объема жидкости от сечения x до сечения $x + dx$. На этом пути на слой действовала сила, равная $2\pi R_0 \tau_0 dx$, где τ_0 — напряжение трения на стенке. Следовательно,

$$dJ = 2\pi R_0 \tau_0 dx. \quad (28)$$

Для τ_0 Прандтль пользуется выражением⁶:

$$\tau_0 = 0,0199 \rho U_1^2 \left(\frac{\nu}{U_1 \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

В нашем случае U_1 должно зависеть от δ . Найдем эту зависимость.

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{U_0}{U_1}; \\ m_1 &= \frac{U_0'}{U_1}; \\ \theta &= \frac{x}{R_0}; \\ Re &= \frac{U_0 R_0}{\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где U_0' — средняя скорость по толщине слоя, а U_0 , как и раньше, средняя скорость по всему сечению отверстия; Re — число Рейнольдса для отверстия.

Нетрудно видеть, что будет иметь место такое равенство:

$$\pi [R_0^2 - (R_0 - \delta)^2] U_0' + \pi (R_0 - \delta)^2 U_1 = \pi R_0^2 U_0,$$

где первый член слева есть расход через сечение слоя, второй член — расход в центральной части течения, а справа — общий расход, взятый

⁶ См. Прандтль, Титъенс, т. II, стр. 95. Численный коэффициент в этой формуле Прандтль берет равным 0,0228. При этом он берет значение отношения средней скорости слоя и максимальной равным 1,235, считая его постоянным для всего слоя. Мы берем это отношение равным 1,335, так как в нашем случае числа Рейнольдса невелики.

по средней скорости. Из этого уравнения получаем:

$$m = m_1 \left[1 + \frac{1 - m_1}{m_1} \left(1 - \frac{\delta}{R_0} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Если допустить, что распределение скоростей в слое будет таким же, как в сечении трубы, где область турбулентного движения распространилась на все сечение, то m_1 должно вообще зависеть от числа Рейнольдса, т. е. в конечном счете опять от δ . Но изменения m_1 весьма незначительны, по крайней мере для небольшого интервала чисел Рейнольдса. Поэтому число m_1 будем считать постоянным. Прандтль берет для него среднее значение, равное $\frac{1}{1,235} = 0,81$. Ввиду того что в нашем случае числа Рейнольдса невелики, мы примем для него значение, равное $\frac{1}{1,335} = 0,750$.

Сохраняя в равенстве (30) только первую степень отношения $\frac{\delta}{R_0}$, получим:

$$m = 1 - 2(1 - m_1) \frac{\delta}{R_0}. \quad (31)$$

Подставим теперь в уравнение (28) значение $U_1 = \frac{U_0}{m}$ и вместо m его выражение. Предварительно дифференцируя выражение J , находим:

$$dJ = 2\pi\rho U_0^3 R_0 \frac{7}{72} \left\{ \left(1 - 0,6 \frac{\delta}{R_0} \right) \frac{d\delta}{m^2} - 2\delta \left(1 - 0,3 \frac{\delta}{R_0} \right) \frac{dm}{m^3} \right\}.$$

Сохраняя всюду только первые степени $\frac{\delta}{R_0}$, получим:

$$\delta^{\frac{1}{4}} \left(1 + 0,525 \frac{\delta}{R_0} \right) d\delta = 0,205 \left(\frac{\nu}{U_0} \right)^{\frac{1}{4}} dx.$$

Интегрируем это уравнение, полагая, что при $x = 0$ также и $\delta = 0$; это дает:

$$\frac{\delta}{\delta^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,256 \left(\frac{\nu}{U_0} \right)^{\frac{1}{4}} x}{1 + 0,233 \frac{\delta}{R_0}}.$$

Возводим обе части в степень $\frac{4}{5}$, заменяем x через ΘR_0 и берем выражение в правой части с точностью до первой степени $\frac{\delta}{R_0}$; после этого получим:

$$\frac{\delta}{R_0} = 0,336 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}} \left(1 - 0,187 \frac{\delta}{R_0} \right)$$

или окончательно:

$$\frac{\delta}{R_0} = \frac{0,336 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}}}{1 + 0,063 R_e^{-\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{4}{5}}}. \quad (32)$$

Сравнение этой формулы с формулой для пластинки показывает, что разница при вычислении толщины слоя по обеим формулам может достигать 10%.

Формула (32) дает толщину пограничного слоя в начальном участке длинной трубы. Если труба коротка и конечное сечение приходится на этот участок, то возникает, конечно, сомнение в том,

⁷ См. Никурадзе, Закон турб. движ. Сб. „Пробл. турбулентн.“, табл. 9, стр. 137.

что эту формулу можно применять для конца трубы. Вопрос этот, повидимому, еще не исследован. Примем, однако, что в сечении, близком к выходному отверстию, толщину можно приближенно вычислить по формуле (32).

Турбулентное трение в пограничном слое

Величина энергии пульсаций тесно связана с турбулентным трением, поэтому остановимся на определении этого последнего в пограничном слое.

Рассмотрим какую-нибудь точку внутри турбулентного потока жидкости: пусть u' и v' будут два компонента скорости пульсации в этой точке. Оказывается, что два случайных события, заключающиеся в том, что осевая пульсация содержится в интервале $(u', u' + du')$, а радиальная в интервале $(v', v' + dv')$, не будут независимы, т. е. между компонентами u' и v' существует корреляция. На это указывает то обстоятельство, что среднее значение по времени произведения обоих компонентов скорости пульсации в каждой точке отлично от нуля.

Эта средняя по времени величина, обозначаемая через $\overline{u'v'}$ ⁸, связана с введенным Рейнольдсом турбулентным трением τ , которое выражается так:

$$\tau = \rho \overline{u'v'}.$$

Изучение турбулентного движения в трубе показало, что изменение τ по радиусу трубы можно считать в первом приближении линейным, равным нулю на оси трубы и максимальным на стенке⁹.

То же самое можно с некоторым приближением принять для турбулентного слоя, полагая, что трение равно нулю на границе слоя и ламинарной области, а на стенке достигает максимального значения.

Мы в дальнейшем воспользуемся формулами для определения τ , предложенными В. В. Войшелем¹⁰. Он показал, что на основании опытов Никурадзе интересующую нас величину в случае гладкой круглой трубы можно представить так:

$$-\overline{u'v'} = U_0^2 \psi \frac{\eta(1-\eta)^2}{\lambda^2 + \eta(1-\eta)},$$

где U_0 в данном случае — средняя скорость по толщине слоя; $\eta = \frac{y}{\delta}$; y — расстояние от стенки по радиусу и λ , ψ — две постоянные величины, зависящие от числа Рейнольдса для слоя.

$$R_e' = \frac{U_0 \delta}{\nu} = \frac{m_1 \delta}{m R_0} R_e \quad (33)$$

следующим образом:

$$\psi = \frac{0,072}{(\lg_{10} R_e')^3}; \quad \lambda^2 = 0,11 (R_e')^{\frac{8}{9}}. \quad (34)$$

Так как мы считаем, что изменение трения и скорости по толщине слоя такое же, как изменение этих величин вдоль радиуса в трубе, то вместо

⁸ Чертой сверху обозначается осреднение по времени.

⁹ См. Никурадзе, Законом турб. движения. Сб. „Пробл. турбулентн.“, стр. 127.

¹⁰ В. В. Войшель, Турбулентное трение и распределение скоростей в прямых круглых трубах. Журнал технической физики, т. V, вып. 8, 1935, стр. 1488.

радиуса во всех формулах у нас стоит толщина слоя δ , а вместо средней скорости по сечению трубы U_0 средняя скорость по толщине слоя U'_0 .

Кроме этих формул, мы воспользуемся из этой же работы формулой для скорости U . Если χ есть отношение последней к U'_0 , т. е.

$$U = U'_0 \chi, \quad (35)$$

то $\frac{d\chi}{d\eta}$ можно представить в виде:

$$\frac{d\chi}{d\eta} = \frac{Re\psi}{\lambda^2} \frac{1-\eta}{\frac{1}{\lambda^2} + \eta(1-\eta)}.$$

Так как λ^2 число достаточно большое, то можно считать, что $\frac{1}{\lambda^2} = 0$; это упрощение для наших целей вполне допустимо и отразится на значении обеих рассматриваемых величин только в интервале, близком к самой стенке. Поэтому будем иметь:

$$-\overline{u'v'} = U_0'^2 \psi(1-\eta); \quad (36)$$

$$\frac{d\chi}{d\eta} = \frac{Re\psi}{\lambda^2} \frac{1}{\eta}. \quad (37)$$

После упрощения формула для турбулентного трения дает линейную зависимость от η ¹¹.

Приведенные формулы позволяют определить турбулентное трение, а вслед за тем и энергию пульсации, что и является нашей целью.

Для дальнейшего нам нужно знать интеграл от τ , распространенный по объему жидкости, которая протекает в единицу времени через выходное сечение пограничного слоя. В этом сечении толщина его δ может быть определена по формуле (32), если известна длина и радиус отверстия форсунки.

Обозначая искомый интеграл через M , мы получим:

$$M = -2\pi\rho \int_0^\delta \overline{u'v'} U (R_0 - y) dy. \quad (38)$$

Подставляя значение $\overline{u'v'}$ и U и делая замену переменных $\eta = \frac{y}{\delta}$, получим:

$$M = 2\pi\rho U_0'^3 \delta^2 \int_0^1 (1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta\right) d\eta.$$

Вычислим отдельно интеграл, стоящий в правой части. Для этого проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 \chi(1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta\right) d\eta = \left[\chi\Phi\right]_0^1 - \int_0^1 \chi' \Phi d\eta;$$

здесь

$$\Phi = \int_0^\eta (1-\eta) \left(\frac{R_0}{\delta} - \eta\right) d\eta = \frac{R_0}{\delta} \eta \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) - \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{2}{3}\eta\right).$$

Заметим, что при $\eta = 0$ (т. е. на стенке) $\chi = 0$, а при $\eta = 1$ (на наружной поверхности слоя):

$$\chi = \frac{U_1}{U'_0} = \frac{1}{m_1}.$$

¹¹ В таком виде формулы эти по существу не отличаются от формул Кармана (см. Никурадзе, «Пробл. турбулентн.», стр. 127), но для нас имеют то преимущество, что постоянные λ , ψ явно выражены через R'_e в простой форме.

При $\eta = 0$, $\Phi = 0$, а при $\eta = 1$

$$\Phi = \frac{R_0}{\delta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta}{R_0}\right).$$

Далее вычислим интеграл:

$$\int_0^1 \chi' \Phi d\eta.$$

Пользуясь формулой (37), найдем, что этот интеграл равен:

$$\frac{R_0}{\delta} \frac{Re\psi}{\lambda^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{36} \frac{\delta}{R_0}\right).$$

Таким образом искомый интеграл равен:

$$\frac{R_0}{\delta} \left\{ \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\delta}{R_0}\right) - \frac{Re\psi}{\lambda^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{36} \frac{\delta}{R_0}\right) \right\}.$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через K , тогда для M получим:

$$M = 2\pi\rho U_0'^2 \psi R_0 \delta K.$$

Заменим в этой формуле U'_0 через U_0 и разделим ее на

$$Q = \pi R_0^2 U_0, \quad (39)$$

тогда получим:

$$\frac{M}{Q} = 2\rho U_0^2 \left(\frac{m_1}{m}\right)^3 \psi \frac{\delta}{R_0} K. \quad (40)$$

Через отношение $\frac{M}{Q}$ выражаются, как мы увидим, постоянная λ , радиусы r_0 и r_1 [ф-лы (23), (26), (27)].

Найдем теперь энергию пульсации E . Она равна:

$$E = \frac{\rho}{2} \int_0^\delta (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) U 2\pi (R_0 - y) dy, \quad (41)$$

где подобно M энергия относится к секундному объему жидкости, протекающей через слой. Формула эта аналогична формуле (38).

Заметим здесь, что если переходить от сечения к сечению струи внутри отверстия, то E будет возрастать. Энергия пульсаций образуется за счет осредненного движения: возрастание E сопровождается падением давления по течению струи.

Когда струя выходит из отверстия, можно приближенно считать, что давление и средняя скорость U_0 уже больше не меняются. Поэтому можно считать, что наибольшее значение E будет в выходном сечении отверстия.

Таким образом, хотя турбулентный слой распространяется на внутреннюю часть струи, но это произойдет вне отверстия, и можно думать, что энергия E не увеличится в связи с этим возрастанием области турбулентности. Поэтому обе величины E и M мы будем брать для выходного сечения отверстия.

Возвратимся к интегралу (41). Между величинами $\overline{u'^2} + \overline{v'^2}$ и $\overline{u'v'}$ при некоторых предположениях можно установить простое соотношение.

Прандтль при выводе своей формулы для турбулентного трения предполагал, что компоненты скорости u' и v' (по крайней мере в случае движения в трубе) пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности не меняется во времени (это значит, что между u' и v' существует полная корреляция). Если таким предположением воспользоваться, то искомое соотношение нетрудно получить.

Обозначим через δ отношение

$$\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{u'^2}}. \quad (42)$$

Предположение о пропорциональности компонентов дает:

$$\frac{v'^2}{-u'v'} = \vartheta,$$

так как мы имеем дело со средними значениями по времени, а ϑ от времени не зависит. Отсюда получаем искомое равенство:

$$\frac{u'^2 + v'^2}{-u'v'} = \vartheta + \frac{1}{\vartheta}. \quad (43)$$

Кроме того, постоянная ϑ не меняется по радиусу трубы (в нашем случае по толщине слоя). Это следует из закона подобия Кармана и хорошо подтверждается опытами¹² (по крайней мере с достаточной для наших целей точностью).

Пользуясь теперь соотношением (43) и формулами (38) и (41), мы получаем:

$$2 \frac{E}{M} = \vartheta + \frac{1}{\vartheta}. \quad (44)$$

Так как M/Q мы можем определить по формуле (40), то для определения E/Q необходимо знать постоянную ϑ .

Теория пока не дает способа для определения постоянной ϑ , которая, повидимому, должна зависеть от числа Рейнольдса. Мы располагаем только теми данными о значении этой постоянной, которые приводит Карман в своем докладе на конгрессе по прикладной механике в Кембридже¹³. Он пользуется опытами Wattendorf и Reichardt, на основании которых можно заключить, что ϑ содержится в интервале от 0,24 до 0,32, причем число Рейнольдса у второго из этих авторов равнялось 25 000.

Никаких других данных, особенно при сравнительно низких числах Рейнольдса, с которыми мы имеем дело, повидимому, не существует. Поэтому мы пока остановимся на среднем значении $\vartheta = 0,28$ и будем пользоваться им для наших расчетов. При этом мы получаем довольно близкое совпадение с опытом при вычислении величины диаметра средней по размеру капли. Конечно, дальнейшее уточнение расчетов мелкости распыливания прежде всего нуждается в более надежном определении энергии E и отсюда и постоянной ϑ .

Вычисление радиусов средней по объему капли в начальном состоянии распыливания

Воспользуемся приведенными выше формулами для получения некоторых численных результатов. Чтобы иметь возможность сравнить их с опытными данными Засса, выполним вычисления для тех условий, в которых он производил свои опыты. На рис. 1¹⁴ представлены 4 кривых распределения, снятых при четырех различных значениях давления распыливания. Относительно этих опытов нужно заметить следующее: прежде всего они производились при довольно значительном противодействии (10 ат). Однако, как показали опыты самого Засса, и особенно последующие эксперименты (см. упомянутые выше работы W. Lee и И. В. Астахова), мелкость распыливания

мало зависит от противодействия. Следовательно, мы вполне можем взять эти четыре опыта Засса для сравнения с результатами вычисления, тем более, что наша теория, основанная на многих еще не проверенных допущениях, не дает, конечно, вполне точного значения искомым величинам, а быть может только порядок их.

Далее мы не знаем, к сожалению, значения вязкости и поверхностного натяжения для топлива, которое применял в своих опытах Засс. Известно, что это был газойль с удельным весом 0,87. Поэтому мы берем только приблизительные значения этих величин, которые не могут к тому же меняться в широких пределах. Вообще же возможные здесь ошибки не могут сильно отразиться на результатах.

Наконец, нужно еще иметь в виду, что в опытах Засса распыливание производилось обычным насосом, который применяется для двигателей дизеля, и, следовательно, поток топлива в отверстиях форсунки должен был быть очень неравномерный. Наши же формулы выведены для установившегося движения топлива. Затем постоянное давление, которое дается Зассом как давление распыливания, повидимому, есть так называемое давление затяжки форсунки. Действительный перепад давления в отверстии форсунки (между начальным и конечным сечением отверстия) может быть выше указанного по крайней мере в значительной части интервала впрыскивания.

Несмотря на указанные обстоятельства, мы все же приведем результаты вычисления, имея в виду сравнение порядка величин.

Перепад давления в интересующих нас четырех опытах Засса равнялся последовательно:

$$140, 210, 270, 340 \text{ кг/см}^2.$$

Опыты производились с газойлем, плотность которого равнялась:

$$\rho = 0,89 \cdot 10^{-6} \text{ кг/см}^3/\text{см}^3.$$

Наконец, весьма вероятное значение коэффициента расхода $\mu = 0,85$. Поэтому средние скорости топлива в отверстиях должны быть близки к значениям:

$$U_0 = 1,51 \cdot 10^4; 1,85 \cdot 10^4; 2,18 \cdot 10^4;$$

$$2,35 \cdot 10^4 \text{ см/сек.}$$

Далее, так как топливо при прохождении через насос довольно сильно нагревается, то вытекающая струя топлива имеет температуру, приблизительно равную 40°. Поэтому для кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения α можно принять такие значения:

$$\nu = 0,075 \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \alpha = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ кг/см}^{15}.$$

Радиус отверстия форсунки в этих опытах равнялся $R_0 = 0,0285$ см, и отношение длины отверстия к радиусу $\theta = 8$.

Принимая эти численные значения величин α, ν, R_0, θ , вычисляем радиус r_1 [ф-ла (27)] для скоростей U_0 , содержащихся в интервале $1,2 - 2,7 \cdot 10^4$ см/сек. В этом интервале содержатся значения тех скоростей, при которых производились упомянутые четыре опыта. Результаты приведены ниже в таблице.

¹² Т. Карман, Некоторые вопросы теории турбулентности. Сб. «Пробл. турбулентн.», стр. 49 и Т. Карман, Механическое подобие и турбулентность, там же, стр. 274.

¹³ Сб. «Пробл. турбулентн.», стр. 45.

¹⁴ «Дизелестроение» № 3, 1938.

¹⁵ Поверхностное натяжение убывает с возрастанием температуры. При 20° у различных сортов газойля оно колеблется от $0,3$ до $0,4 \cdot 10^{-4}$.

$U_0 \cdot 10^{-4}$ (см/сек)	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
r_1 (микрон)	3,22	2,28	1,72	1,35	1,10	0,914

Таким образом радиус r_1 средней по объему капли меняется от 0,914 до 3,22 микрона. Конечно, этот радиус мы не можем еще сравнивать с ра-

диусом средней капли, который наблюдается на опыте, так как полученная величина относится только к начальному состоянию, т. е. к моменту образования капель. При дальнейшем движении их размеры должны увеличиваться благодаря столкновениям и слияниям. Мы теперь займемся приближенным вычислением радиуса средней по объему капли в конечном состоянии.

(Окончание в следующем номере)

С. Н. КУЦАЕВ

О протекании масла через подшипник

Автор, освещая вопрос протекания масла через подшипник, дает обзор существующих методов подсчета количества протекающего через подшипник масла и, вводя некоторые уточнения, предлагает собственную методику. Проверка предложенной методики по экспериментальным данным Нюккера дает удовлетворительную точность ($\pm 25\%$).

Статья является дальнейшим развитием более ранних работ автора, опубликованных уже в „Дизелестроении“. Трактующий вопрос имеет практическое значение для дизелестроительной промышленности.

* * *

In discussing the flow of oil through bearings the author gives a review of the existing methods of calculations the rate of flow and suggests his own method, giving more strict treatment of some points. The method offered when comparing the results with experimental results of Nucker shows satisfactory accuracy ($\pm 25\%$).

This article forms part of a series of earlier papers by the same author published in „Diselestroyeniye“. The problem treated is of practical importance to the diesel engine industry.

Для полного расчета смазки подшипника скользящего трения необходимо знать возможно точнее среднюю температуру смазочного слоя при установившемся режиме работы. В случаях малой подачи масла, когда главная масса тепла отдается в воздух непосредственно от корпуса подшипника, температуру смазочного слоя можно определить на основании опытных данных Лаше. В случаях большой подачи масла главная масса тепла отводится самим протекающим маслом, количество которого должно быть определено возможно точнее.

Приближенные решения задачи о протекании масла через подшипник (заданных размеров, при заданных условиях подачи масла и заданном режиме работы его) были даны Фальцем¹ и П. И. Орловым². Однако обе формулы — Фальца и П. И. Орлова — при количественной проверке по экспериментальным результатам Нюккера дали резкое несоответствие действительности. Оба автора исходили из уравнения Рейнольдса, которое, как показали вычисления Нюккера, хорошо отображает процесс истечения масла. Вычисленные Нюккером количества масла по экспериментальным кривым давления и вязкости и экспериментальным эксцентриситетам оказались очень близкими к действительности: в девяти случаях меньше действительных на 2—8%, а в одном больше действительного на 18%.

Причина расхождения формул Фальца и П. И. Орлова с экспериментальными результатами заклю-

чается в грубых допущениях в вопросе о характере распределения давлений в слое смазки.

Автор в данной работе дает приближенное решение задачи о протекании масла через подшипник, удовлетворительно согласующееся с экспериментальными результатами Нюккера.

Основное уравнение и простейшие частные случаи протекания масла через малые зазоры

Основное уравнение движения масла в малом зазоре между почти параллельными поверхностями было дано Рейнольдсом. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta v \frac{\partial h^3}{\partial x}. \quad (1R)$$

В полном виде это уравнение потребуется нам только в одном случае — для определения количества масла, вытекающего из зазора между двумя кругами; для задач в двух измерениях мы будем опускать одно слагаемое левой части.

Рассмотрим сначала простейшие случаи задачи о протекании масла через параллельные зазоры.

1-й случай

Масло протягивается через зазор благодаря движению верхней пластинки параллельно самой себе. Верхняя пластинка — прямоугольник с очень длинной стороной в направлении, перпендикулярном к рисунку. Скорость перпендикулярна к длинной стороне.

¹ Фальц, Основы смазочной техники. Там же график опытных результатов Лаше.

² П. И. Орлов, Смазка легких двигателей.

³ Сб. «Гидродинамическая теория смазки», стр. 295; уравнение (17), где $U_1 = 0$, $v = 0$, $U_0 = v$.

О распыливании топлива в двигателях Дизеля¹

Столкновение капель и рост их размера

Мы раньше уже указывали, что при движении капель после их образования возможны столкновения и как следствие слияние. Сколько-нибудь правильный учет влияния столкновений на увеличение диаметра капель представляет собой задачу большой сложности, поэтому ниже мы пытаемся лишь весьма грубо оценить величину этого влияния.

Представим себе конусообразное пространство, заполненное распыленной струей, состоящей из капельного тумана (рис. 6). Пусть BC будет конечное сечение отверстия форсунки. Дуга окруж-

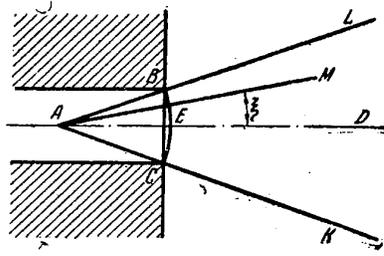


Рис. 6

ности BEC с центром A есть сечение сферической поверхности. Вообразим себе, что через поверхность этой сферы выбрасываются капли одинакового начального радиуса r_1 , так что за этой поверхностью внутри конуса $LBECK$ находятся только вполне сформировавшиеся капли. Все эти капли имеют общую скорость U_0 и некоторую скорость относительного беспорядочного движения c .

Будем представлять себе, что последняя скорость у всех капель одинакова по величине, но может иметь всевозможное направление, чем и объясняется расширение струи по мере ее движения. Начальное значение скорости прием равным среднему квадратичному скоростей выбрасывания капель; обозначим величину начальной скорости относительного движения через c_0 . Распределение капель по величине начальной скорости выбрасывания дает нам та же формула (9), и отсюда нетрудно получить среднее квадратичное значение этой скорости.

По мере движения капель от сферической поверхности диаметр средней по объему капли в каждой точке струи будет расти благодаря столкновению, после которого иногда возможны слияния. Но так как после каждого слияния скорость вновь образовавшейся капли меньше скоростей столкнувшихся капель, то по мере удаления от конечного сечения отверстий скорость беспорядочного движения капель будет убывать, а вместе с ней и число столкновений. Таким образом темп роста объема капель должен замедляться, и на большом расстоянии от отверстия мы получим некоторую величину капель, которая уже почти не будет меняться. Радиус средней по объему капли в этом конечном состоянии мы и будем вычислять; обозначим его через r_2 .

Таким образом мы предполагаем, что внутренность конуса струи заполнена каплями так, что в окрестности каждой точки имеются капли только одного радиуса, какой был бы у средней по объему капли в данном месте струи. Этот радиус мы обозначим через r . По мере движения от поверхности сферы BEC этот радиус увеличивается. Следовательно, его можно считать функцией радиуса вектора $AM = x$, которым мы будем определять положение точки внутри конуса.

Обозначим радиус сферы BEC через R_0 , тогда при $x = R_0$ можно считать, что радиус $r = r_1$, а при достаточно большом значении x радиус $r = r_2$; можно приближенно (и для определенности) считать, что при этом $x = \infty$.

Будем далее считать, что радиус r не зависит от полярного угла ξ , т. е. всюду внутри конуса на определенном расстоянии x в каждый момент имеются только капли радиуса r . Пусть и скорость беспорядочного движения капель c также зависит только от x и изменяется от значения c_1 при $x = R_0$ до какого-нибудь значения c_2 при $x = \infty$; последнее будет, конечно, меньше, чем c_1 .

Рассмотрим наряду с величинами u и r также плотность распределения капель по пространству γ , т. е. число капель, приходящихся на единицу объема в окрестности каждой точки. Эту величину мы также будем считать зависящей только от x ; иными словами, плотность будет одинакова на всякой сфере радиуса x внутри конуса струи.

С увеличением x плотность будет убывать, во-первых, потому, что в единицу времени вылетает из отверстия некоторое определенное число капель, которое при движении внутри конуса будет приходиться на все большее пространство, и, во-вторых, потому, что по мере движения слияния приведут к уменьшению числа капель.

Найдем сперва зависимость плотности γ от расстояния x . Для этого проведем радиусом x и $x + dx$ две сферы и рассмотрим часть слоя между ними, расположенную внутри конуса. Число капель, входящее через внутреннюю сферу в единицу времени, равно:

$$\sigma x^2 U_0 \gamma,$$

где σ — телесный угол конуса;

U_0 — скорость движения всех капель, относительная скорость c мала в сравнении с U_0 и ее можно не принимать во внимание; равным образом, так как угол конуса мал, то можно считать, что U_0 всюду направлена по радиусу, хотя, конечно, эта скорость направлена для всех капель по оси конуса.

Число капель, выходящее из нашего слоя через сферу радиуса $x + dx$, будет равно:

$$\sigma U_0 x^2 \gamma + \sigma U_0 \frac{d}{dx} (x^2 \gamma) dx.$$

Благодаря слияниям число капель внутри нашего слоя за тот же промежуток времени должно уменьшиться. Эта убыль рассматриваемого числа капель должна равняться разности между числом вошедших в наш слой и числом капель,

¹ См. „Дизелестроение“ № 3 и 4, 1938.

вышедших из него, т. е. эта убыль равна:

$$-\sigma U_0 d(x^2 \gamma).$$

Так как при всех столкновениях, вызывающих слияния капель, общий их объем не меняется, то мы легко можем подсчитать полученную убыль числа капель еще и другим способом. Мы предполагаем, что на расстоянии x все капли имеют один и тот же радиус r ; пусть их объем будет τ . Чтобы это равенство радиусов не нарушилось в силу столкновений, мы допускаем, что объем всех капель за время их пребывания в нашем слое вырастет на $d\tau$. Общее число капель, вошедших внутрь слоя, за единицу времени равно:

$$\sigma U_0 x^2 \gamma.$$

Если объем каждой из них обратился в $\tau + d\tau$, то, в силу сохранения общего объема жидкости, содержащейся в каплях, число их уменьшится в отношении

$$\frac{\tau}{\tau + d\tau} \approx 1 - \frac{d\tau}{\tau}.$$

Следовательно, убыль числа капель в единицу времени будет равна:

$$\sigma U_0 x^2 \gamma \frac{d\tau}{\tau}.$$

Мы получили второе выражение для убыли числа капель. Приравняв оба выражения и сократив на σU_0 , получим такое уравнение:

$$-d(x^2 \gamma) = x^2 \gamma \frac{d\tau}{\tau}.$$

После интегрирования будем иметь:

$$\gamma = \frac{C}{\tau x^2}, \quad (45)$$

где C — произвольная постоянная.

Чтобы определить постоянную, найдем общее число N капель, которые за единицу времени выбрасываются через поверхность ВЕС. На этой поверхности $x = R_0'$, а $\tau = \tau_1$, следовательно,

$$N = \sigma R_0'^2 U_0 \gamma_0 = \sigma R_0'^2 U_0 \frac{C}{\tau_1 R_0'^2}.$$

Отсюда

$$C = \frac{N \tau_1}{\sigma U_0}.$$

Но так как $N \tau_1 = Q = \pi R_0'^2 U_0$, мы получим окончательно, что

$$C = \frac{\pi}{\sigma} R_0'^2. \quad (46)$$

Таким образом плотность γ при наших упрощающих предположениях определена.

Рассмотрим теперь какую-нибудь каплю с радиусом r_1 , которая только вышла из отверстия. Помимо общей всем каплям скорости U_0 , она имеет еще относительную скорость, начальное значение которой равно c_1 .

Благодаря столкновениям путь капли вообще будет зигзагообразным, но так как плотность γ не зависит от угла ξ , то можно считать, что со всех сторон наша капля будет испытывать равное число ударов, и путь вообще будет мало уклоняться от прямой. Поэтому пренебрегаем этими отклонениями и примем, что путь нашей капли прямолинейный.

Столкновения вообще зависят от относительной скорости между каплями. Наша капля имеет скорость c по отношению к осям, движущимся поступательно со скоростью U_0 . Относительная скорость других капель по нашему предположению такая же по величине, но может иметь произвольное направление. Следовательно, относитель-

ная скорость между каплями может меняться от 0 до $2c$. Если через \bar{c} обозначить среднее значение относительной скорости между каплями, то на основании подсчета, делаемого в кинетической теории газов, мы будем иметь²:

$$\bar{c} = \frac{4}{3} c. \quad (47)$$

Число соударений зависит от относительной скорости между каплями. Поэтому можно считать, что это число не изменится для нашей капли, если мы все остальные капли будем считать неподвижными, а ей сообщим скорость \bar{c} вместо c ; при этом в среднем за единицу времени наша капля испытает столько же соударений, сколько их было бы, если бы все капли имели скорости, равные c , но случайно направленные во все стороны.

Таким образом, заменяя скорость c на \bar{c} , мы можем считать, что наша капля движется среди неподвижных капель, распределенных внутри ко- нуса струи с плотностью γ .

Двигаясь среди неподвижных капель, наша капля за время dt пройдет путь $\bar{c} dt$. Если ее радиус равен r , то, следовательно, за это время она опишет объем, равный $\pi r^2 \bar{c} dt$. На основании предположения, сделанного выше, в окрестностях каждой точки пути нашей капли встречаются другие капли одинакового размера, равного тому размеру, которого уже достигла рассматриваемая капля. Поэтому очевидно, что за это время она столкнется со всякой другой каплей, центр которой находится внутри цилиндра с радиусом $2r$, высотой $\bar{c} dt$ (рис. 7), ось которого совпадает

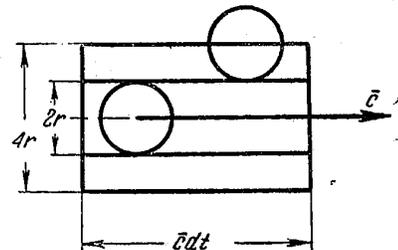


Рис. 7

с траекторией нашей капли. Объем этого цилиндра равен $4\pi r^2 \bar{c} dt$. Отсюда число капель, с которыми произойдет столкновение, равно

$$4\pi r^2 \bar{c} \frac{C}{\tau x^2} dt.$$

Так как абсолютная скорость нашей капли мало отличается от U_0 , то можно считать, что

$$dt = \frac{dx}{U_0},$$

и выражение для числа столкновений будет равно:

$$\frac{4\pi C \bar{c} r^2}{\tau x^2 U_0} dx. \quad (48)$$

Допустим, что каждое столкновение, хотя бы это было только касание, приводит к слиянию капель и образованию новой капли с увеличенным объемом. Вообще говоря, это, конечно, неправильно, так как, когда минимальное расстояние между центрами лишь немногим меньше $2r$ и относительная скорость достаточно велика, слияния может и не произойти. Однако, принимая во внимание, что относительная скорость в среднем вообще невелика, можно пренебречь случаями, когда не происходит слияния.

² См. проф. А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи, ГТИ, стр. 136, 1933.

Впрочем мы пытались ввести в расчет величину l минимального сближения центра капель, при котором еще происходят слияния их. Эта величина l должна быть несколько меньшей, чем $2r$. Она, правда, определялась нами из довольно грубого расчета, основанного на следующем: определялась сила, необходимая для разрыва поверхностной пленки, охватывающей обе капли при сближении их центров на расстояние l ; затем эта сила сравнивалась с изменением количества движения, которое необходимо для того, чтобы капли удерживались друг около друга, если до сближения относительная скорость их была \bar{c} . Вычисленная таким образом величина l определяла собой радиус цилиндра на рис. 7 и, следовательно, входила в выражение (48) для числа столкновений. Вычисления были доведены до конца, но не привели к заметному изменению результатов. Ввиду этого мы их здесь опускаем и принимаем в дальнейшем, что $l = 2r$.

Если число столкновений на пути dx равно выражению (48), то общее приращение объема нашей капли $d\tau$ на этом пути будет равно произведению объема каждой капли τ на число их (48), отсюда имеем:

$$d\tau = \frac{4\pi C \bar{c} r^2}{x^2 U_0} dx. \quad (49)$$

Это основное уравнение, определяющее изменение объема капли при ее движении внутри конуса струи.

Полученное уравнение содержит еще скорость \bar{c} , которую нужно исключить; это можно сделать, рассматривая изменение скорости при столкновении.

Положим, наша капля с объемом τ и массой $\rho\tau$ столкнулась с несколькими неподвижными каплями с общим объемом $\Delta\tau$ и массой $\rho\Delta\tau$. Если удар был неупругий, то скорость соединившейся общей массы \bar{c}' связана со скоростью \bar{c} , которую наша движущаяся капля имела до удара, таким соотношением:

$$\bar{c}' = \frac{\rho\tau}{\rho\tau + \rho\Delta\tau} \bar{c},$$

отсюда получаем, что

$$\bar{c}' = \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\tau}\right) \bar{c}$$

или

$$\Delta\bar{c} = -\frac{\Delta\tau}{\tau} \bar{c},$$

где $\Delta\bar{c} = \bar{c}' - \bar{c}$ — убыль скорости при ударе. Переходя к пределу, получим:

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

Интеграция этого уравнения дает:

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{C_1}{r^3}, \quad (50)$$

где C_1 — произвольная постоянная, равная

$$C_1 = \bar{c}_1 r_1^3 = \frac{4}{3} c_1 r_1^3;$$

c_1 и r_1 — начальные значения c и r .

Исключим теперь c из уравнения (49), пользуясь формулой (50), тогда получим:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{4\pi C C_1 r^2}{x^2 r^3 U_0} \quad (51)$$

или, подставляя $\tau = \frac{4\pi}{3} r^3$, придем к такому уравнению:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{C C_1}{U_0 r^3 x^2}. \quad (52)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{r^{1/2}}{4} - \frac{r_1^{1/2}}{4} = \frac{C C_1}{U_0 R_0}, \quad (53)$$

если одновременно воспользоваться условиями: при

$$x = R_0' \quad r = r_1$$

и

$$x = \infty \quad r = r_2.$$

Из формулы (53) мы можем получить радиус r_2 средней по объему капли на достаточном удалении от отверстия, где столкновения уже не будут заметно изменять объема капли, так как будут происходить очень редко.

Преобразуем теперь выражение, стоящее в правой части (53). Если ξ_0 — угол между образующей и осью конуса, то телесный угол последнего будет равен:

$$\sigma = 2\pi(1 - \cos \xi_0),$$

а между R_0 и R_0' будет соотношение:

$$R_0 = R_0' \sin \xi_0.$$

Отсюда

$$\frac{\pi R_0}{\sigma R_0'} = \frac{\sin \xi_0}{2(1 - \cos \xi_0)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\xi_0}{2}}.$$

Так как угол ξ_0 получается всегда довольно малым, то можно положить

$$\frac{\pi R_0}{\sigma R_0'} = \frac{1}{\operatorname{tg} \xi_0}.$$

Пользуясь этой формулой и формулами (46) и (51), можно написать:

$$\frac{C C_1}{U_0 R_0'} = \frac{4c_1 r_1^3 \pi R_0^2}{3U_0 \sigma R_0'} = \frac{4c_1 r_1^3 R_0}{3U_0 \operatorname{tg} \xi_0}.$$

Исключим теперь угол ξ_0 . Пусть средняя квадратичная поперечная скорость капли будет в начальном состоянии распыливания v_0 , тогда можно приближение положить⁸:

$$\operatorname{tg} \xi_0 = \frac{v_0}{U_0}.$$

Конечно, конус струи вообще не может иметь очень резких границ и отдельные капли при своем движении могут очень сильно отклоняться от оси струи, но главная масса их будет внутри конуса, определяемого углом ξ_0 . Поэтому мы считаем приближенно, что все капли, расстояние которых от отверстия равно x , распределены равномерно в части тонкого сферического слоя того же радиуса x , находящегося внутри конуса.

Далее, так как средние квадратические скорости u_0 и v_0 одинаковые, что видно из формы функции распределения, симметричной относительно k_x и k_y , то, следовательно,

$$v_0 = \frac{c_1}{\sqrt{2}}.$$

⁸ Мы здесь не учитываем еще того, что вследствие постепенной потери скорости относительного движения капель угол ξ_0 должен при увеличении x несколько уменьшаться, образующие конуса будут несколько загибаться в сторону его оси. Это отразится на плотности γ капель, которая будет несколько медленнее падать с увеличением x , чем мы принимаем. Поэтому и число столкновений должно быть больше, а следовательно, и рост объема капель несколько интенсивнее, чем это имеет место в нашем расчете.

Отсюда

$$\lg \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_1}{u_0}$$

и, следовательно,

$$\frac{CC_1}{U_0 R_0} = \frac{4\sqrt{2}}{3} R_0 r_1^3.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (53), получим:

$$r_2^4 = r_1^4 + \frac{16\sqrt{2}}{3} r_1^3 R_0. \quad (54)$$

Так как первый член справа имеет незначительную величину по сравнению со вторым, то мы можем его отбросить и написать окончательно:

$$r_2 = 2r_1 \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{R_0}{r_1}}. \quad (55)$$

Эта формула приближенно учитывает увеличение размера капли при ее движении в конусе струи и относится уже к окончательному состоянию распыленной струи.

Вычислим r_2 , пользуясь значениями r_1 , полученными выше. Результат приводится здесь вместе со значением скорости U_0 и r_1 . На рис. 8 две кривые изображают изменение r_1 и r_2 в зависимости от U_0 .

U_0	10^{-4} (см/сек)	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
r_1	(микроны)	3,22	2,28	1,72	1,35	1,10	0,914
r_2	(микроны)	16,4	12,6	10,24	8,57	7,31	6,36

Для диаметров средних по объему капель в опытах Засса можно принять такие значения:

U_0	10^{-4} (см/сек)	1,51	1,85	2,18	2,35
d	(микроны)	22,9	19,5	16,3	14,3

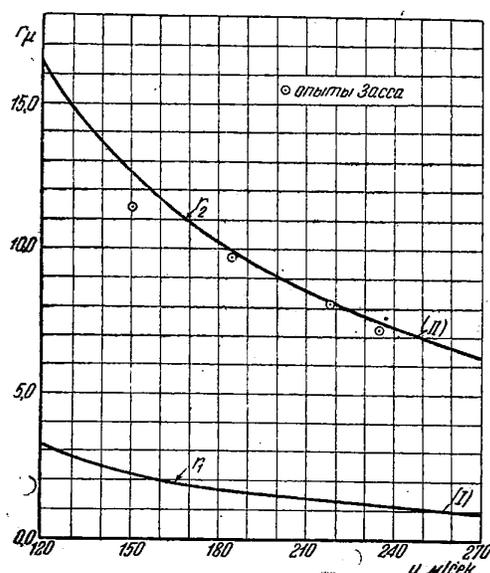


Рис. 8

Если мы четыре точки, соответствующие опытам Засса, нанесем на диаграмму рис. 8, то они довольно хорошо расположатся на кривой (II).

Этому совпадению результатов теории и опыта пока не следует придавать большого значения. Прежде всего мы не знаем точно условий опытов Засса, которые позволили бы сделать правильно соответствующие вычисления. Кроме того, нужно было бы сделать поправку на противодавление, которое в опытах Засса равно было 10 ат., а тогда опытные точки расположились бы значительно выше.

С другими опытами совпадение к тому же получается гораздо хуже. Например, в опытах W. Lee при таком же примерно диаметре отверстия и перепаде давления диаметр d капли менялся в пределах от 30 до 40 микрон.

Что касается опытов И. В. Астахова, то он получал диаметры в пределах от 190 до 140 микрон при изменении скорости от 62 до 119 м/сек. Наши формулы к этому случаю, повидимому, вообще неприменимы, так как числа Рейнольдса получаются слишком малыми и близкими к критическому значению. Вероятно, роль турбулентности в этих случаях уже незначительна, и все явление протекает иначе.

Изложенный метод расчета дает все же результаты, порядок которых довольно близко подходит к тем значениям, которые наблюдаются на опыте. Дальнейшее усовершенствование теории, можно надеяться, сблизит результаты ее с данными опыта, но это возможно будет лишь тогда, когда последние накопятся в достаточном количестве и дадут вполне ясную картину явления, чего в настоящее время еще нет (по крайней мере, если говорить о количественных зависимостях).

Заключительные замечания

Предлагаемый расчет мелкости распыливания можно, конечно, рассматривать только как опыт. Многочисленные непроверенные предположения, которые потребовались для того, чтобы довести вычисление диаметра капли до конца, нуждаются еще в пересмотре. Возможно, однако, что на этом пути можно будет получить более строгую теорию этого явления.

Распыливание топлива мы рассматривали как бы состоящим из двух этапов. Сначала топливо переходит от связанного состояния в струе к начальному состоянию распыливания. Общая энергия жидкости в обоих состояниях одинакова; это обстоятельство позволяет определить функцию распределения φ . Затем при движении капельного тумана при столкновениях капель и слияниях происходит рост размеров их и переход к окончательному состоянию распыливания. В этом процессе величина энергии E не сохраняется, так как благодаря неупругим ударам часть ее будет уходить на нагревание и колебания жидкости внутри капли.

Более точное изучение числа и последствий соударений требует прежде всего рассмотрения пространственного распределения капель. При этом можно было бы найти не только средний объем капли в конечном состоянии распыливания, но и функцию распределения для этого состояния.

Если на деле явление действительно протекает подобным образом, то, конечно, разделение на

этапы не может быть таким резким. Кроме того, геометрически струя вне отверстия и ее конус не отличаются той правильностью и простотой формы, как мы предполагали.

Наконец, влияние противодействия окружающей воздушной среды, возможно, мы могли бы учесть следующим образом. Так как среда должна тормозить движение капель, то падение скорости относительного движения их происходит в первом приближении пропорционально плотности среды. Скорости эти вообще малы, и для сопротивления можно применять формулу Стокса. Отсюда с падением скорости c будет уменьшаться и число столкновений, а следовательно, и рост объема капель при переходе от начального к конечному состоянию распыливания.

Кроме этого, среда будет очень сильно тормозить и среднее движение всех капель. Благодаря большой сравнительно с c скорости U_0 это замедление будет уже пропорционально квадрату U_0 ; поэтому угол конуса струи с ростом противодействия будет увеличиваться, плотность распределения капель убывать, а следовательно, будет убывать и число столкновений. Это повлечет за собой также несколько более медленный рост объема капель.

Таким образом, вероятно, можно будет объяснить уменьшение среднего объема капель при возрастании противодействия.

Впрочем нужно, конечно, чтобы опыты окончательно установили, как протекает это явление, так как здесь существует разногласие между различными авторами.

БЫСТРОХОДНЫЕ ДИЗЕЛИ

Канд. техн. наук П. М. ЗЕРНОВ
(Краснознам. ММИ им. Баумана)

Повышение крутящего момента автомобильного дизеля в области пониженных рабочих чисел оборотов

Сравнительная оценка величины крутящего момента и характера его изменения по оборотам для десяти современных дизельмоторов и карбюраторных моторов Форд А и В показала, что карбюраторные моторы обладают лучшей тяговой способностью, особенно в области низких чисел оборотов.

Опыты свидетельствуют, что этот недостаток дизельмоторов не является органическим пороком рабочего процесса. Основная причина его лежит в принципе работы топливных насосов и может быть устранена.

Примененное приспособление для изменения принципа подачи топлива насосом Бош позволило улучшить тяговую характеристику дизельмотора и повысить крутящий момент в области пониженных оборотов до 20%.

A comparison of the torque magnitude and the character of its variation with speed in ten modern Diesel engines and the Ford A and B carburetter engines shows, the carburetter engines have a better traction power especially in the lower speed range.

Experiments prove this defect of the Diesel engine not to be due to the essence of the Diesel process. Its principal cause is the principle of the operation of the fuel pump and can be eliminated.

A device used by the author to modify the Bosch fuel pump discharge made it possible to obtain a better Diesel engine traction performance and to increase the torque in the lower speed range by 20%.

Анализ тяговых свойств современных дизелей

Тяговая характеристика автомобильного дизеля, так же как и карбюраторного двигателя, определяется крутящим моментом. Поэтому кривая изменения крутящего момента в зависимости от числа оборотов является основной характеристикой дизеля как тягового агрегата.

Так как двигатели имеют различные рабочие объемы и номинальные числа оборотов, а нас интересует характер изменения крутящего момента с изменением скоростного режима, то ве-

личину крутящего момента для каждого числа оборотов $M_{кр}$ будем относить к величине крутящего момента при номинальном скоростном режиме $M_{кр}$. Характеристикой каждого данного скоростного режима будем считать отношение данного числа оборотов к номинальному $M_{кр}$.

Сравнительная оценка характера изменения крутящего момента для десяти современных дизельных и карбюраторных двигателей Форд А и В представлена на рис. 1.

Значения крутящих моментов дизелей получены из характеристик мощности, снятых при по-