

TRIANGLES
AND
COUNTING NUMBERS

TRIANGULOS
Y
NUMEROS DE CONTAR

by

David O. Nilsson, Ph.D.

© 2005

por

Contents

One day	1
The next day	1.1
The second triangle	1.2
The third triangle	1.3
Board work	2
The fourth triangle	3
Three observations - a, b, c	3.1
Three observations - a , b , c	3.2
Three observations	3.3
Edge numbers	3.3 a
Content numbers	3.3 b
A pattern	3.3 c
Another pattern	3.3 d
Another pattern	3.3 e
The fifth triangle	4
Another pattern	5
Some comments	6
A list	7

Contenidos

Algún día
El proxima día
El segundo triángulo
El tercero triángulo
Trabajo a la pizarra
El cuarto triángulo
Tres observaciones - a, b, c
Tres observaciones - a , b , c
Tres observaciones
Números a los lados
Números de contenidos
Un modelo
Otro modelo
Otro modelo
El quinto triángulo
Otro modelo
Unos comentarios
Una lista

Additional but optional parts

Two observations	8
Formulas	8.1
One solution	8.1 a
Another solution	8.1 b
Another formula	8.1 c
Comments	9
Synthesis I	9.1
Analysis	9.2
Synthesis I	9.3

Partes adicionales pero opcionales

Dos observaciones
Fórmulas
Una solución
Otra solución
Otra fórmula
Comentarios

Each teacher must decide which level this project is suitable for. The author would be interested to know grade level and other suitable comments from teachers who use it.

Cada maestro tiene que decidir para cual nivel este proyecto es apropiado. El autor estaría interesado en saber el nivel y otros comentarios aptos de los maestros que los usan.

< 1 >

At the end of class one day

Al fin de clase algun día

Tell each student to bring 84 pennies to class. (That does not mean three quarters, a nickel, and four pennies, or any other combination of coins amounting to 84¢. It means 84 pennies.)

Diga a cada estudiante de llevar 84 centavos a la clase. (Eso no quiere decir tres pesetas, cinco centavos, o cuatro centavos, ni cualquiera otra combinación de monedas igual a 84¢. Lo que quiere decir es 84 centavos.)

< 1.1 >

In class the next day, tell each student to make a triangle using his coins. You may get some trying to use all their pennies, some right triangles (in which some pennies touch each other but some don't), some triangular donuts (an outline in the shape of a triangle but lacking pennies on the interior).

En la clase el día siguiente, diga a cada estudiante que haga un triangulo usando sus monedas. Quizá alguno trate de usar todos sus centavos, algunos para triangulos rectos (en lo cual unas monedas tocan a si mismas pero otras no), algunos para triangulos anulares (un molde triangular pero sin monedas por dentro).

If you get even one equilateral, completely filled in, triangle, compliment the student, and use it as an example to ask

Si hay un triangulo equilateral y completamente relleno, felicítele al estudiante y úselo como ejemplo para preguntar

what is the fewest number of pennies which make an equilateral, completely filled in, triangle?

¿cuánto es el minimo numero de monedas que hacen un triangulo equilateral y completamente relleno?

The answer is 3. Have each student make a 3-penny triangle, and put the other 81 pennies back into the bag.

La respuesta es 3. Diga a cada estudiante que haga un triangulo de 3 monedas, y ponga las otras 81 monedas en la bolsa.

< 1.2 >

Then ask:

how many more coins do you need to make a bigger similar triangle?

After seeing what designs they make, see whether anyone has simply put 3 more pennies along the base of the 3-penny triangle to make a triangle which consists of 6 pennies.

If someone has done it, exclaim and congratulate, and tell every one else to do the same.

If no one has done it, ask leading questions to lead at least someone to do it.

Then have them take 3 pennies out of the bag, and use them to make a new 3-penny triangle to the left of the 6-penny triangle. Now each student has two triangles, side by side.

Luego pregunte:

¿cuántas monedas más se necesitan para hacer un triángulo semejante y más grande?

Después de ver cuáles moldes hacen, descubra si alguien simplemente ha puesto 3 monedas más junto la base del triángulo de 3 monedas y ha hecho un triángulo de 6 monedas.

Si alguien lo ha hecho, exclame y felicítelo, y diga que los otros hagan lo mismo.

Si nadie lo ha hecho, haga preguntas que guíen al menos a alguien a descubrirlo.

Luego dígalos que tomen 3 monedas de la bolsa, y las usen para hacer un nuevo triángulo de 3 monedas a la izquierda del triángulo de 6 monedas. Ahora cada estudiante tiene dos triángulos juntos.

< 1.3 >

Then ask:

how many more pennies do you need to make a similar, larger, triangle?

After seeing what designs they make, see whether anyone has simply put 4 more pennies along the base of the 6-penny triangle to make a triangle which consists of 10 pennies.

Then have them take 6 pennies out of the bag, and use them to make a new 6-penny triangle to the left of the 10-penny triangle. Now each student has three triangles, side by side.

Luego pregunte:

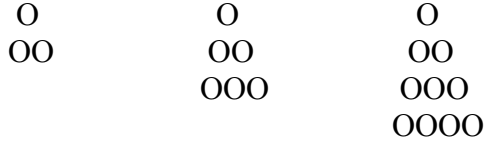
¿cuántas monedas más se necesitan para hacer un triángulo semejante más grande?

Después de ver cuáles moldes hacen, determine si alguien simplemente ha puesto 4 monedas más junto la base del triángulo de 6 monedas para hacer un triángulo que consista de 10 monedas.

Luego dígalos que remuevan 6 monedas de la bolsa, y úselas para hacer un nuevo triángulo de 6 monedas a la izquierda del triángulo de 10 monedas. Ahora cada estudiante tiene tres triángulos juntos.

Pause here, and on the board, draw pictures of the three triangles,

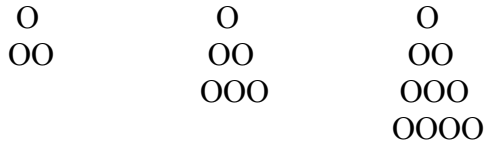
Haga una pausa aquí, y en la pizarra dibuje los tres triángulos,



and write the name of each triangle above it.

y escriba el nombre de cada triángulo arriba de él.

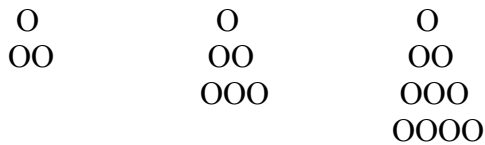
Triangle One	Triangle Two	Triangle Three
--------------	--------------	----------------



Certainly that follows the instructions, but there is an easier and better way: instead of writing out the whole word *Triangle*, write just an upper-case T; and instead of writing out the whole word *One* or *Two* or *Three*, write a subscript to the right of the T. Do this same sort of abbreviation for each triangle.

Ciertamente eso sigue las instrucciones, pero hay una manera más fácil y mejor: en lugar de escribir la palabra entera *Triangulo*, escriba solo una mayúscula T; y en lugar de escribir la palabra entera *Uno* o *Dos* o *Tres*, escriba un subscrito a la derecha de la T. Haga el mismo tipo de abreviación por cada triángulo.

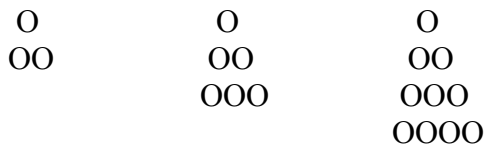
the name	T ₁	T ₂	T ₃	el nombre
----------	----------------	----------------	----------------	-----------



Then under each picture write the number of pennies on each side.

Luego debajo de cada dibujo escriba el numero de monedas en cada lado.

the name	T ₁	T ₂	T ₃	el nombre
----------	----------------	----------------	----------------	-----------



on each edge	2	3	4	en cada lado
--------------	---	---	---	--------------

Before continuing, observe that the number of coins on each side is greater by one than the number of the triangle: that is,

Antes de continuar, observe que el numero de monedas en cada lado es mayor por uno que el número del triangulo: eso es,

the first triangle, T_1 has 2 coins on each edge
 triangle number 2 has 3 coins on each edge
 triangle three has 4 coins on each edge

T_1 tiene 2 monedas en cada lado
 T_2 tiene 3 monedas “ “ “
 T_3 tiene 4 monedas “ ” ”

To continue - under the number of edge coins, write the total number of pennies in each triangle

Para continuar - debajo de el número de monedas en cada lado, escribe el número de monedas en cada triángulo

the name	T_1	T_2	T_3	el nombre
	O OO	O OO OOO	O OO OOO OOOO	
on each edge	2	3	4	en cada lado
total coins	3	6	10	total de monedas

< 3 >

Can you decide by looking at the picture how many pennies are on each edge of T_4 ?

¿Puede decidir mirando al dibujo cuantas monedas hay en cada lado de T_4 ?

And can you predict how many coins will constitute T_4 ?

¿ Y puede predecir cuantas monedas constituirá T_4 ?

the name	T_1	T_2	T_3	T_4	el nombre
	O OO	O OO OOO	O OO OOO OOOO	O OO OOO OOOO OOOOO	
on each edge	2	3	4	5	en cada lado
total coins	3	6	10	15	total de monedas

THREE OBSERVATIONS
STATED GEOMETRICALLY

< 3.1 >

TRES OBSERVACIONES
DICHO GEOMETRICAMENTE

the 1st triangle
together with 3 more coins
makes the 2nd triangle

< 3.1 a >

el 1^o triángulo
junto con 3 monedas más
hace el 2^o triángulo

the 2nd triangle
together with 4 more coins
makes the 3rd triangle

< 3.1 b >

el 2^o triángulo
junto con 4 monedas más
hace el 3^o triángulo

the 3rd triangle
together with 5 more coins
makes the 4th triangle

< 3.1 c >

el 3^o triángulo
junto con 5 monedas más
hace el 4^o triángulo

THE SAME THREE
OBSERVATIONS, STATED
IN TERMS OF NUMBERS

< 3.2 >

LAS MISMAS TRES
OBSERVACIONES, DICHO
EN TÉRMINOS DE NÚMEROS

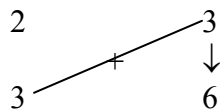
3 coins in T₁ plus a row of 3 more,
makes a total of 6 in T₂

< 3.2 a >

3 monedas en T₁ más una fila de 3
más, hace un total de 6 en T₂

T ₁	T ₂
O	O
OO	OO
	OOO

T ₃	T ₄
O	O
OO	OO
OOO	OOO
OOOO	OOOO
	OOOOO

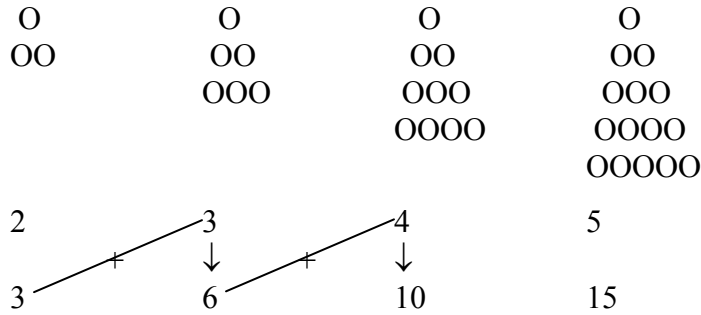


4	5
10	15

6 coins in T₂ plus a row of 4 more,
makes a total of 10 in T₃

< 3.2 b >

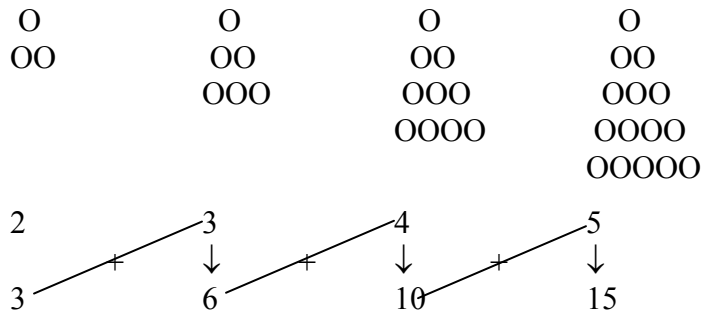
6 monedas in T₂ más una fila de 4 mas,
hace un total de 10 en T₃



< 3.2 c >

10 coins in T_3 plus 5 more makes a total of 15 in T_4

10 monedas en T_3 más 5 hace un total de 15 en T_4



THE SAME THREE OBSERVATIONS
BUT STATED DIFFERENTLY AGAIN
THIS TIME USING LETTERS
INSTEAD OF WORDS

< 3.3 >

LAS MISMAS TRES OBSERVACIONES
PERO DICHO DIFERENTEMENTE OTRA VEZ
ESTA VEZ USANDO LETRAS
EN LUGAR DE PALABRAS

< 3.3 a >

First, instead of saying
' T_1 has two coins on each edge',
write

Primero, en lugar de decir
' T_1 tiene dos monedas en cada lado'
escribe

and say

$e_1 = 2$

y dice

'e sub one is two'

'e sub uno es dos'

The letter e is the initial letter in the word *edge*, and it is used to abbreviate the phrase 'the number of coins on each edge of the triangle', so the symbols $e_1 = 2$ mean, literally, "the number of coins on each edge of triangle 1 is two" or "there are two coins on each edge of triangle 1".

La letra e es la letra inicial en la palabra *edge*, y es usada para abreviar la frase 'el número de monedas en cada lado del triángulo', así los símbolos $e_1 = 2$ quieren decir, literalmente "el número de monedas en cada lado (edge) del triángulo 1 es dos" o "hay dos monedas en cada lado (edge) del triángulo 1".

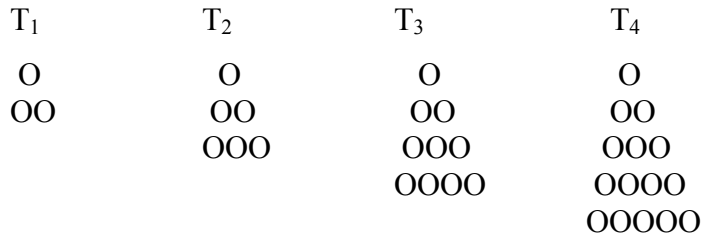
and instead of saying
 'T₂ has three coins on each edge',
 write

and say
 'e sub two is three'

and instead of saying
 'T₃ has four coins on each edge',
 write

and say
 'e sub three is four'

and now, instead of being labeled 'on
 each edge', the first row of numbers
 under the triangles becomes



~~on each edge~~ e₁ = 2 e₂ = 3 e₃ = 4 e₄ = 5 ~~en cada lado~~

Do you see a pattern here?

for each triangle,

in words, the number of edge coins is
 one greater than the number of the
 triangle.

Second, instead of saying
 'T₁ contains three coins',
 write

and say

$$t_1 = 3$$

y en lugar de decir
 'T₂ tiene tres monedas en cada lado',
 escribe

e₂ = 3
 y dice
 'e sub dos es tres'

y en lugar de decir
 'T₃ tiene cuatro monedas en cada lado',
 escribe

e₃ = 4
 y dice
 'e sub tres es cuatro'

y ahora, en lugar de ser titulada 'en cada
 lado', la primera fila de números debajo
 de los triángulos se hace

¿Ve un modelo aquí?

por cada triángulo,

en palabras, el número de monedas en
 cada lado es mayor por uno que el
 número del triángulo

< 3.3 b >

Segundo, en lugar de decir
 'T₁ contiene tres monedas',
 escribe

y dice

'little t sub one is three'

't chica sub uno es tres'

and instead of saying
'T₂ contains 6 coins',
write

y en lugar de decir
'T₂ contiene seis monedas',
escribe

$t_2 = 6$

and say
'little t sub two is six'

y dice
't chica sub uno es seis'

and instead of saying
'T₃ three contains 10 coins',
write

y en lugar de decir
'T₃ contiene diez monedas',
escribe

$t_3 = 10$

and say
'little t sub three is ten'

y dice
't chica sub tres es diez'

and now, instead of being labeled 'total
coins', the second row of numbers under
the triangles becomes

y ahora, en lugar de ser titulado
'monedas totales', la segunda fila de
números debajo de los triángulos se hace

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	
	O	O	O	O	
	OO	OO	OO	OO	
		OOO	OOO	OOO	
			OOOO	OOOO	
				OOOOO	
	$e_1 = 2$	$e_2 = 3$	$e_3 = 4$	$e_4 = 5$	
total coins	$t_1 = 3$	$t_2 = 6$	$t_3 = 10$	$t_4 = 15$	monedas totales

< 3.3 c >

Third, now look again at the triangles
and the numbers below them.

Tercero, ahora mira otra vez a los
triángulos y los números debajo de ellos.

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
	O	O	O	O
	OO	OO	OO	OO
		OOO	OOO	OOO
			OOOO	OOOO
				OOOOO
	$e_1 = 2$	$e_2 = 3$	$e_3 = 4$	$e_4 = 5$
	$t_1 = 3$	$t_2 = 6$	$t_3 = 10$	$t_4 = 15$

and replace the words in < 3.1 > by their equivalent symbols

y reemplacen las palabras en < 3.1 > por sus símbolos equivalentes.

the 1st triangle
together with 3 more coins
makes the 2nd triangle

$$t_1 + e_2 = t_2$$

el 1^o triángulo
junto con 3 monedas más
hace el 2^o triángulo

the 2nd triangle
together with 4 more coins
makes the 3rd triangle

$$t_2 + e_3 = t_3$$

el 2^o triángulo
junto con 4 monedas más
hace el 3^o triángulo

the 3rd triangle
together with 5 more coins
makes the 4th triangle

$$t_3 + e_4 = t_4$$

el 3^o triángulo
junto con 4 monedas más
hace el 4^o triángulo

and replace the words in < 3.2 > by their equivalent symbols

y reemplace las palabras en < 3.2 > por sus símbolos equivalentes.

3 coins in T_1
plus a row of 3 more,
makes a total of 6 in T_2

$$t_1 + e_2 = t_2$$
$$3 + 3 = 6$$

3 monedas en T_1
más una fila de 3 más,
hace un total de 6 en T_2

6 coins in T_2
plus a row of 4 more
makes a total of 10 in T_3

$$t_2 + e_3 = t_3$$
$$6 + 4 = 10$$

6 monedas en T_2
más una fila de 4 más
hace un total de 10 en T_3

10 coins in T_3
plus a row of 5 more
makes a total of 15 in T_4

$$t_3 + e_4 = t_4$$
$$10 + 5 = 15$$

10 monedas en T_3
más una fila de 5 más
hace un total de 15 en T_4

< 3.3 d >

Fourth, observe that the statements

Cuarto, observe que los dichos

	from	from
	< 3.1 >	< 3.2 >
$t_2 =$	$t_1 + e_2 =$	$t_1 + 3$
$t_3 =$	$t_2 + e_3 =$	$t_2 + 4$
$t_4 =$	$t_3 + e_4 =$	$t_3 + 5$

can be summarized by

se puede epitomar por

$$t_n = t_{n-1} + e_n = t_{n-1} + (n + 1), \text{ where } n \text{ is } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4$$

which says

the number of coins in each of the second or third or fourth triangles	=	the number in the previous triangle	+	the new edge number
--	---	---	---	---------------------------

< 3.3 e >

Fifth, those three statements can be expanded, because $t_1 = 1 + 2$, by substitution

Quinto, los tres dichos se pueden extender, porque $t_1 = 1 + 2$, por substución

$$t_2 = t_1 + e_2 = t_1 + 3 = 1 + 2 + 3$$

$$t_3 = t_2 + e_3 = t_2 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$t_4 = t_3 + e_4 = t_3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

and these can be summarized by

y estos se pueden epitomar por

$$t_n = 1 + \dots + (n+1), \text{ where } n \text{ is } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4$$

which says

the number of coins in each of the second or third or fourth triangles	=	the sum of the counting numbers starting at 1 and stopping at the number next after the number of the triangle
--	---	--

$$t_n = 1 + \dots + (n+1), \text{ where } n \text{ is } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4$$

↑

↑

the number of the triangle

the number next after the number of the triangle

Does that same rule describe T_5 ?

¿Describe esa misma regla T_5 ?

< 4 >

Then say:

Luego diga:

before making the next triangle with pennies, can any one predict how many pennies will be needed?

antes de hacer el próximo triángulo con monedas, ¿puede alguien predecir cuántas monedas necesitarán?

If someone says 21, congratulate, and ask

Si alguien dice 21, felicite, y pregúntele

how do you know that?

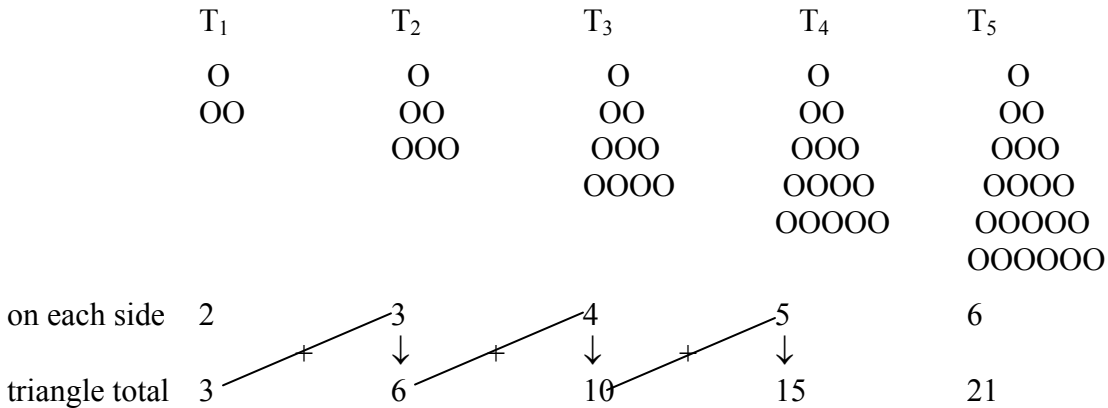
¿cómo sabe eso?

There are two ways to know that. One is to notice from the first four triangles that each one consists of the number in the previous triangle plus one new row with one more penny in the new row.

Hay dos maneras para saber eso. Una es observar en los primeros cuatro triángulos que cada uno consiste en el número del triángulo previo más una nueva fila con una moneda más en la fila nueva.

So the next has 15 (from T_4) plus a bottom row of 6, for a total of 21.

Así, el próximo tiene 15 (de T_4) más una fila debajo de 6, para un total de 21.



But this is not totally satisfactory, because you have to know the facts about the preceding triangle. If I were to ask how many coins are in T_{10} , you would have to calculate T_9 , T_8 , T_7 , T_6 , and T_5 in order to know T_{10} . But the formula in < 5.4 > gives

Pero esto es no totalmente satisfactorio, porque alguien tiene que saber los hechos sobre el triángulo precedente. Si yo preguntase cuántas monedas hay en T_{10} , tendría que calcular T_9 , T_8 , T_7 , T_6 , y T_5 para saber T_{10} . Pero la fórmula < > da

$$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \text{ . because 6 is the counting number next after 5}$$

porque 6 es el número de contar proximo despues 5

and you already know that $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = t_4 = 15$, so $t_5 = 21$, which is the same answer.

y ya sabe que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = t_4 = 15$, así $t_5 = 21$, que es la misma respuesta.

Can you state a general rule?

¿Puede proponer la regla general?

$$t_n = 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$$

But this becomes cumbersome with bigger numbers, that is, with more pennies on each side. So notice that the addition can be converted into multiplication followed by division by two.

Pero esto se hace incómodo con números más grandes, eso es, con más monedas en cada lado. Así observe que el sumar se puede convertir en el multiplicar seguido por división por dos.

$$t_1 = 1 + 2 = (2 \bullet 3)/2 = 6/2 = 3$$

$$t_2 = 1 + 2 + 3 = (3 \bullet 4)/2 = 12/2 = 6$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = (4 \bullet 5)/2 = 20/2 = 10$$

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (5 \bullet 6)/2 = 30/2 = 15$$

$$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (6 \bullet 7)/2 = 42/2 = 21$$

T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅
O	O	O	O	O
OO	OO	OO	OO	OO
	OOO	OOO	OOO	OOO
		OOOO	OOOO	OOOO
			OOOOO	OOOOO
				OOOOOO
$t_1 = 2 \bullet 3/2$	$t_2 = 3 \bullet 4/2$	$t_3 = 4 \bullet 5/2$	$t_4 = 5 \bullet 6/2$	$t_5 = 6 \bullet 7/2$
= 6/2	= 12/2	= 20/2	= 30/2	= 42/2
= 3	= 6	= 10	= 15	= 21

Can you state a general rule?

¿Puede proponer la regla general?

$$t_n = (n+1) \bullet (n+2)/2$$

Here the letter n can be any counting number, and • means multiplication.

Aquí la letra n puede ser cualquier número de contar, y • quiere decir el multiplicar.

How many pennies are needed for the sixth triangle?

¿Cuántas monedas se necesitan para el sexto triangulo”

$$t_6 = 1 + 2 + \dots + 7 = (7 \bullet 8)/2 = 56/2 = 28$$

The ... mean that I have not written some of the numbers: they are only an abbreviation for including all the numbers. Three dots like this are called **ellipsis**. Written in full, without the ellipsis, that result is

Los ... quieren decir que no he escrito unos de los numeros: solo son una abreviatura para incluir todos los numeros. Tres puntos como estos se llaman **elipsis**. Escrito sin elipsis, ese resultado es

$$t_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = (7 \bullet 8)/2 = 56/2 = 28$$

Some comments about
English and Spanish

Unos comentarios sobre
el inglés y el español

Where English has three words
the upper case

Donde el inglés tiene tres palabras
the upper case

Spanish has two words
la mayuscula

el español tiene dos palabras
la mayuscula

In English, the word 'triangle' precedes
the word 'number'. In Spanish, the word
'triángulo' follows the word 'número'.
This is another instance of compound
translation.

En el inglés la palabra 'triangle' precede la
palababra 'number'. En el español, la
palabra 'triángulo' sigue la palabra
'número'. Esto es otra instancia de
traducción compuesta.

the first triangle number is 3
the second triangle number is 6
the third triangle number is 10

el primer número triangulo es 3
el segundo número triangulo es 6
el tercero número triangulo es 10

In both languages, one must be careful to
distinguish between the symbols

En ambos idiomas, uno tiene que ser
cuidadoso para distinguir entre los simbolos

T₁ t₁
T₂ t₂
T₃ t₃
T₄ t₄
T₅ t₅
etc

the upper case is geometrical
la mayuscula es geometrical

the lower case is numerical
la minuscula es numerica

and between
the number of the triangle
and
the triangle number

y entre
el número del triángulo
el número triángulo

The number of the triangle is the
subscript on big T.

El número del triángulo es el subscripto
en T grande.

The triangle number is the answer for
little t.

El número triángulo es la respuesta en la
t chica.

the number of the first triangle is 1
the first triangle number is 3

el número del primer triángulo es 1
el primer número triángulo es 3

T₁ is the name of the first triangle.

T₁ es el nombre del primer triángulo

t₁ denotes the first triangle number, and is 3

t₁ denota el primer número triángulo, y es 3

the number of the second triangle is 2
the second triangle number is 6

el número del segundo triángulo es 2
el segundo número triángulo es 6

T₂ is the name of the second triangle.

T₂ es el nombre del segundo triángulo

t₂ denotes the second triangle number, and is 6

t₂ denota el segundo número triángulo, y es 6

the number of the third triangle is 3
the third triangle number is 10

el número del tercero triángulo es 3
el tercero número triángulo es 10

< 7 >

A list

Una lista

Counting
Numbers

Triangle
Numbers

1			
2			
3	3 = t ₁ = 1+2		= 2•3/2
4			
5			
6	6 = t ₂ = 3+3	= 1+2+3	= 3•4/2
7			
8			
9			
10	10 = t ₃ = 6+4	= 1+2+3+4	= 4•5/2
11			
12			
13			
14			
15	15 = t ₄ = 10+5	= 1+2+3+4+5	= 5•6/2
16			
17			
18			
19			
20			
21	21 = t ₅ = 15+6	= 1+2+3+4+5+6	= 6•7/2
22			
23			

24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39

$$28 = t_6 = 21+7 = 1+2+3+4+5+6+7 = 7 \bullet 8/2$$

$$36 = t_7 = 28+8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 8 \bullet 9/2$$

That is the end of the project. The following is additional and optional

Eso es el fin del proyecto. Lo siguiente es adicional y opcional.

< 8 >

Two observations on mathematics

Dos observaciones sobre las matemáticas

I do hope that the above material can be used to develop better awareness of and facility with Counting Numbers by learning to relate arithmetic with geometry, **without needing to use a calculator.**

Yo espero que la materia arriba se pueda usar para desarrollar mejor conocimiento y facilidad con Números de Contar aprendiendo a relacionar la aritmética con la geometría **sin tener que usar una calculadora.**

Each teacher can decide whether to include the following.

Cada maestro puede decidir si o no incluir la siguiente.

< 8.1 >

Formulas

Fórmulas

The formula

La fórmula

$$e_n = n + 1$$

is true for all triangles.

es verdadero por todos triangulos.

The formula

La formula

$$t_n = t_{n-1} + e_n$$

and its extension

y su extensión

$$t_n = t_{n-1} + e_n = t_{n-1} + (n + 1),$$

are true for the triangles after the first one

son verdaderas por los triángulos después del primero

$$t_2 = t_1 + e_2 = t_1 + 3$$

$$t_3 = t_2 + e_3 = t_2 + 4$$

$$t_4 = t_3 + e_4 = t_3 + 5$$

but they are not true for $n = 1$, because then $n - 1$ would be 0, and

pero no son verdaderas por $n = 1$, porque luego $n - 1$ sería 0, y

$$t_1 \neq t_0 + e_1$$

because t_0 is a meaningless symbol because T_1 is the first triangle - there isn't a T_0

porque t_0 es un símbolo sin sentido porque T_1 es el primer triángulo - no hay un T_0

< 8.1 a >

One solution

Una solución

Be aware of the significance of formulas, what they describe and what they don't describe.

Sea sabedor del significado de las fórmulas, lo que describen y lo que no describen.

< 8.1 b >

Another solution

Otra solución

At the beginning of < 9.1 >, it says that the formula $e_n = n + 1$ is true for all triangles. Gramatically speaking, 'is true for all triangles' is called a qualifier.

Al principio de < 9.1 >, dice que la fórmula $e_n = n + 1$ es verdadero por todos triángulos. Gramaticamente hablando, 'es verdadero por todos triángulos' se conoce como un calificación.

The other solution is to write a qualifier following an equation, either in words or in symbols.

La otra solución es escribir una calificación despues de una ecuación, o en palabras o en símbolos.

If you choose to write qualifiers in symbols, learn the following.

Si escoje escribir calificaciones en símbolos, aprenda lo siguiente.

The set of all counting numbers can be denoted either by a list, enclosed in braces,

La colección de todos los números de contar se puede denotar o por una lista, encierado en braces,

$$\{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

or by the two upper case letters CN.

o por las dos mayusculas CN.

To say that 1 is a counting number, or 7 is a counting number, use the symbol \in and write

Para decir que 1 es un número de contar, o 7 es un número de contar, use el símbolo \in y escriba

$$1 \in \text{CN} , 7 \in \text{CN}$$

To say that 0 is not a counting number, or $\frac{1}{2}$ is not a counting number, use the symbol \notin and write

Para decir que 0 no es un número de contar, o $\frac{1}{2}$ no es un número de contar, use el símbolo \notin y escriba

$$0 \notin \text{CN} , \frac{1}{2} \notin \text{CN}$$

The two words ‘for each’ are abbreviated by the symbol

Las dos palabras ‘por cada’ son abreviadas por el símbolo

\forall

which looks like an upside down upper case letter A.

que parece una mayuscula A hacia arriba.

Now the statement that

Ahora el dicho que

$$“ e_n = n + 1$$

is true for all triangles “.

es verdadero para todos los triangulos”

can be written

se puede escribir

$$e_n = n + 1 \forall n \in \text{CN}$$

\uparrow \uparrow

this is the qualifier

este es el calificativo

At the beginning of < 9.1 >, it says that the formula $t_n = t_{n-1} + e_n$ is not true for $n = 1$ but is true for all other counting numbers.

Al principio de < 9.1 >, dice que la fórmula $t_n = t_{n-1} + e_n$ no es verdadera por $n = 1$ pero es verdadera por todos los otros números de contar.

Here the qualifier is “is not true for $n = 1$ but is true for all other counting numbers”. It can be rewritten “is true for all counting numbers except 1”.

Aquí la calificación es “no es verdadera por $n = 1$ pero es verdadera para todos los otros números de contar.”. Esto se puede reescribir “es verdadera para todos números de contar excepto 1”.

“for all counting numbers” is written

“para todos los números de contar” se escribe

$$\forall n \in \mathbb{CN}$$

and “except 1” is written

y “excepto 1” se escribe

$$\setminus \{ 1 \}$$

so ‘ $t_n = t_{n-1} + e_n$ is not true for $n = 1$ but is true for all other counting numbers.’ is written

así ‘ $t_n = t_{n-1} + e_n$ no es verdadero por $n = 1$ pero es verdadero por todos los otros números de contar’ se escribe

$$t_n = t_{n-1} + e_n \quad \forall n \in \mathbb{CN} \setminus \{ 1 \}$$

< 8.1 c >

Another formula

Otra fórmula

There is another way of writing the formula discussed in < 3.3 e > and < 4 >, specifically, the three formulas

Hay otra manera de escribir la fórmula examinada en < 3.3 e > y < 4 >, específicamente, las tres fórmulas

$$t_2 = 1 + 2 + 3$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

can be written in one formula with a qualifier, as the following

se pueden escribir en una fórmula con una calificación como la siguiente

$$t_n = 1 + \dots + (n+1), \text{ where } n \text{ is } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4$$

The other way uses the upper case Greek letter sigma (which begins with S like the word Sum begins with S), Σ in the following way.

La otra manera usa la mayúscula sigma griega (que empieza con S como la palabra Suma empieza con S), Σ en la manera siguiente.

$$t_2 = 1 + 2 + 3 = \sum_1^3$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = \sum_1^4$$

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_1^5$$

$$t_n = 1 + \dots + (n+1) = \sum_1^{n+1}$$

In this notation, the number below sigma is the starting number and the number above sigma is the stopping number.

En esta notación, el número debajo de sigma es el número inicial y el número arriba de sigma es el número final.

< 9 >

Two final comments, pertaining to style.

Dos comentarios finales, tocante al estilo.

There are two styles - one is called *analysis*, the other is called *synthesis*.

Hay dos estilos - uno se llama *análisis*, otro se llama *síntesis*.

< 9.1 >

The discussion in this presentation is synthetic. It starts with a physical situation guided by the teacher's questions in creative response to what the students do or don't do, and the first sign post is the question

La discusión en esta presentación es sintética. Se empieza con una situación física guiada por preguntas del maestro en contestación a que hacen o no hacen los estudiantes, y la primera señal es la pregunta

what is the fewest number of pennies which make an equilateral, completely filled in, triangle?

¿cuánto es el mínimo número de monedas que hacen un triángulo equilateral y completamente relleno?

From this the students are led to describe several characteristics of the triangles, first geometrically in words, then numerically in words, and then numerically in symbols. The first result is the statement (the equation) $e_n = n + 1$.

De esto los estudiantes se guían para describir unas características de los triángulos, primero geométricamente en palabras, entonces numéricamente en palabras, y luego numéricamente en símbolos. El primer resultado es el dicho (la ecuación) $e_n = n + 1$.

< 9.2 >

Some 'pure mathematicians' present an analytical discussion. They start with pre-chosen (the student does not know how) definitions followed by theorems and proofs, isolated from and unrelated to any physical reality

Algunos 'matemáticos puros' presentan una discusión analítica. Empiezan con definiciones preseleccionadas (el estudiante no sabe como) seguidas por teoremas y pruebas, aisladas y no relacionada a cualquiera realidad física

For example, they start with (who knows why?)

Por ejemplo, empiecen con (¿quién sabe por qué?)

Definition 1

Denote by e_n the number of coins on each edge of the n^{th} triangle

and continue immediately with

y continua inmediatamente con

Theorem 1

$$e_n = n + 1 \quad \forall n \in \{n \mid n \text{ is a positive integer}\}$$

Proof:

The proof is intuitively obvious, and is left to the student.

La prueba es intuitivamente obvia, y se deja al estudiante.

and continue with Definition 2 and Theorem 2, whatever they may be.

y continua con Definición 2 y Teorema 2, cualquiera que sean.

The phrase *intuitively obvious*, or some variation of it, such as *clearly we see that*, is an intimidating form of irony.

La frase *intuitivamente obvia*, o alguna variación de ésta, como *claramente vemos que*, es una forma intimidante de ironía.

< 9.3 >

For all of history mathematics has evolved for solving real problems, in service to mankind - from predicting flooding on the Nile, to using a quipu to count cattle in Peru. Let young people experience its connection with reality, rather than be mystified by meaningless symbols.

Durante toda historia la matemática se ha desarrollado para resolver problemas reales, para beneficio del género humano - del predecir la inundación del Nilo, al usar un quipu para contar ganado en Perú. Deje que la juventud experimente su conexión con la realidad, en vez de confundirlos por símbolos sin sentido.

The above mentioned irony was illustrated repeatedly, when I used to use a specific text for differential equations, which at the top of a particular page stated that “clearly we see that” and then wrote an equation. I always managed to end a class period at the bottom of the previous page, and announced that during the next class period we would continue ‘on the next page’. At the start of the next class, I’d tell them to look at the top of the next page, and I asked “do we clearly see that”. If my question was met with silence, I said “good, I’m glad

La ironía mencionada arriba ilustraba muchas veces, cuando yo usaba un libro específico de ecuaciones diferenciales, en el cual al principio de una página específica, indicaba que “claro vemos que” y luego escribía una ecuación. Siempre lograba terminar una clase al fin de la página anterior, y anunciaba que durante la próxima clase continuaríamos ‘en la página siguiente’. Al principio de la clase siguiente, les instruía a mirar al inicio de la página siguiente, y les preguntaba “vemos claramente que?”. Si mi pregunta se

that everyone clearly sees that, so let's have a pop quiz - solve that equation". That always generated chaos, and one by one the students spoke up, saying that they didn't understand it. Then I said to forget the pop quiz, and I would discuss that equation. Regularly that took me forty minutes, filling the entire front blackboard.

That was a triple lesson.

For one, specifically solving that equation - I had laid the groundwork in the preceding classes.

For two, generally how to read a math book, with all the clearly-we-see-thats and the it-is-intuitively-obvious's receiving their full attention.

And for three, don't just sit there - participate.

To quote from Maurice Valency, "Let everything in the development occur by reason of what has occurred before, so that all things may be so well enchained that one results from the other by a correct sequence." And to quote from Hegel, 'once the dialectic has been separated from proof, the notion of philosophical demonstration has been lost'. Can you imagine arithmetic, differential equations, and Hegel in the same paper?

encontraba con silencio, decía "bien, estoy feliz que todos la vean, por lo tanto, tengamos una prueba breve - resuelvan la ecuación." Eso siempre engendró caos, y uno por uno los estudiantes hablaron, diciendo que no entendían la ecuación. Entonces dije que olvidásemos la prueba breve, y discutiríamos esa ecuación. Regularmente esa me tomó de cuarenta a minutos, llenando la pizarra entera.

Fue una lección triple.

Por una parte, específicamente resolviendo esa ecuación - yo había preparado el fondo en periodos de clase anterior.

Por otra parte, como generalmente leer un libro matemático, con todos los dichos 'claramente-vemos' y 'eso-es-intuitivo-obvio' recibiendo sus atenciones completas.

Y por último, no simplemente estar sentados sino participar.

Para citar a Maurice Valency, 'Deje que todo dentro del desarrollo suceda por razón de lo que ha ocurrido antes, de manera que todas las cosas sean conectadas tan bien que una cosa resulta de la otra por su propia continuación ordenada.' Y para citar a Hegel, 'en el momento que la dialéctica se separa de la prueba, la idea de demostración filosófica se olvida.'. ¿Puede imaginar aritmética, ecuaciones diferenciales, y Hegel en el mismo papel?.

A granddaughter who had just graduated from high school asked me “what is precalculus?”. I told her that it has five parts: arithmetic, algebra, geometry, trigonometry, and analytic geometry. Clearly she had had an analytical teacher who just ‘presented’ the mathematics, without relating it to any reality, and the new graduate had not participated in her own education. And I thought of a cartoon in which a young person wearing cap and gown asked his father “what does cum laude on my diploma mean?”.

Una nieta quien recientemente se ha graduado de la escuela secundaria me preguntó “¿qué es precalculus?”. Le dije que tiene cinco partes: aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, y geometría analítica. Claramente ella ha tenido un maestro analítico quien meramente ‘presentó’ la matemática, sin relacionándola a ninguna realidad, y la nueva graduada no ha participado en su propia educación. Y yo pensé de una caricatura donde un joven llevando gorro y túnica preguntó a su padre “¿qué quiere decir cum laude en mi diploma?”.

Version 70616 1623

david.o.nilsson@mail.utexas.edu